Προτεινόμενα Θέματα

Μαθηματικά Θετικών Σπουδών/

Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής

11-3-2017

Θέμα 1

Α. Δίνεται συνάρτηση f που είναι αντιστρέψιμη και παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$.

Β. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha) - \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx$$

Γ. Δίνεται $f(x) = 1 + \ln(\sqrt{x-1} + 1)$. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την f^{-1}.

Δ. Να υπολογίσετε το $I = \int_1^5 f(x)dx$.

Λύση

Α. Είναι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} (x)' f(x)dx = [xf(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} xf'(x)dx = [xf(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(f(x))f'(x)dx$$

Θέτουμε $f(x) = u$, άρα $f'(x)dx = du$ και $u_1 = f(\alpha)$ και $u_2 = f(\beta)$,

έτσι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = [xf(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(u)du = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha) - \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx$$

Β. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$, με

$$f'(x) = 0 + \frac{1}{\sqrt{x-1}+1}\left(\sqrt{x-1}+1\right)'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}} =$$

$$= \frac{1}{2(x-1) + 2\sqrt{x-1}} > 0$$

για $x \in (1, +\infty)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$, οπότε θα είναι 1-1 και επομένως ορίζεται η f^{-1}. Έτσι

$$f(x) = y \Leftrightarrow 1 + \ln(\sqrt{x-1}+1) = y$$

$$\Leftrightarrow \ln(\sqrt{x-1}+1) = y - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} + 1 = e^{y-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = e^{y-1} - 1$$

πρέπει

$$e^{y-1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{y-1} \geq 1 \Leftrightarrow y - 1 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 1.$$

Έτσι

$$x-1=(e^{y-1}-1)^2 \Leftrightarrow x=e^{2y-2}-2e^{y-1}+1+1$$
$$f^{-1}(y)=e^{2y-2}-2e^{y-1}+2,\ y\geq 1$$

Οπότε $f^{-1}(x)=e^{2x-2}-2e^{x-1}+2,\ x\geq 1$.

Γ.

$$\int_1^5 f(x)dx=5f(5)-1f(1)-\int_{f(1)}^{f(5)} f^{-1}(x)dx=$$
$$=5(1+\ln 3)-1-\int_1^{1+\ln 3}(e^{2x-2}-2e^{x-1}+2)dx=$$
$$=4+5\ln 3+\left[-\frac{1}{2}e^{2x-2}+2e^{x-1}-2x\right]_1^{1+\ln 3}$$
$$=4+5\ln 3+\left(-\frac{1}{2}e^{2\ln 3}+2e^{\ln 3}-2-2\ln 3\right)-\left(-\frac{1}{2}e^{0}+2e^{0}-2\right)$$
$$=4+3\ln 3$$

Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{xe^x}{e^x-1} & ,x\neq 0\\ 1 & ,x=0\end{cases}.$$

Α. Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια και ως προς την παραγωγισιμότητά της στο $x_0=0$.

Β. **α.** Να αποδείξετε ότι $xe^x-e^x+1>0$, για κάθε $x>0$.

β. Να αποδείξετε ότι $f(x)>1$, για κάθε $x>0$.

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)=\frac{f(x)}{x}$, $h(x)=\frac{1}{x}$ και τις ευθείες $x=1, x=e$.

Λύση

Α. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{xe^x}{e^x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{(xe^x)'}{(e^x-1)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+xe^x}{e^x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)=1=f(0)$.

Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Ο λόγος μεταβολής της f είναι, για κάθε $x\neq 0$,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{xe^x}{e^x-1}-1}{x}=\frac{xe^x-e^x+1}{xe^x-x}\text{, οπότε}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x-e^x+1}{xe^x-x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{(xe^x-e^x+1)'}{(xe^x-x)'}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x}{e^x+xe^x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{(xe^x)'}{(e^x+xe^x-1)'}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+xe^x}{e^x+e^x+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x}{2+x}=\frac{1}{2}$$

Β. **α.** Θεωρούμε τη συνάρτηση

$g(x)=xe^x-e^x+1$. Επειδή η g συνεχής στο $[0,+\infty)$ και

$g'(x)=e^x+xe^x-e^x=xe^x>0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$, η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Άρα για κάθε $x>0$ ισχύει

$$g(x)>g(0)\Leftrightarrow xe^x-e^x+1>0.$$

β. Για κάθε $x>0$ είναι

$$f(x)>1\Leftrightarrow \frac{xe^x}{e^x-1}>1\Leftrightarrow \frac{xe^x}{e^x-1}-1>0\Leftrightarrow \frac{xe^x-e^x+1}{e^x-1}>0$$

Ισχύει διότι $xe^x-e^x+1>0$ λόγω του ερωτήματος (α) και $e^x-1>0$, για κάθε $x>0$.

γ. Επειδή οι g και h είναι συνεχείς στο $[1,e]$ το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E=\int_1^e\left|f(x)-g(x)\right|dx.$$

Αλλά για κάθε $x\in[1,e]$ είναι $g(x)-h(x)>0\Leftrightarrow \frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x}>0\Leftrightarrow f(x)>1$, που ισχύει (ερώτημα β). Άρα

$$E=\int_1^e\big(g(x)-h(x)\big)dx=\int_1^e\frac{e^x}{e^x-1}dx-\int_1^e\frac{1}{x}dx=\left[\ln(e^x-1)\right]_1^e-\left[\ln x\right]_1^e$$
$$=\ln(e^e-1)-\ln e+\ln 1=\ln(e^e-1)-\ln\left[e(e-1)\right]$$
$$=\ln\frac{e^e-1}{e^2-e}\ \text{τ.μ.}$$