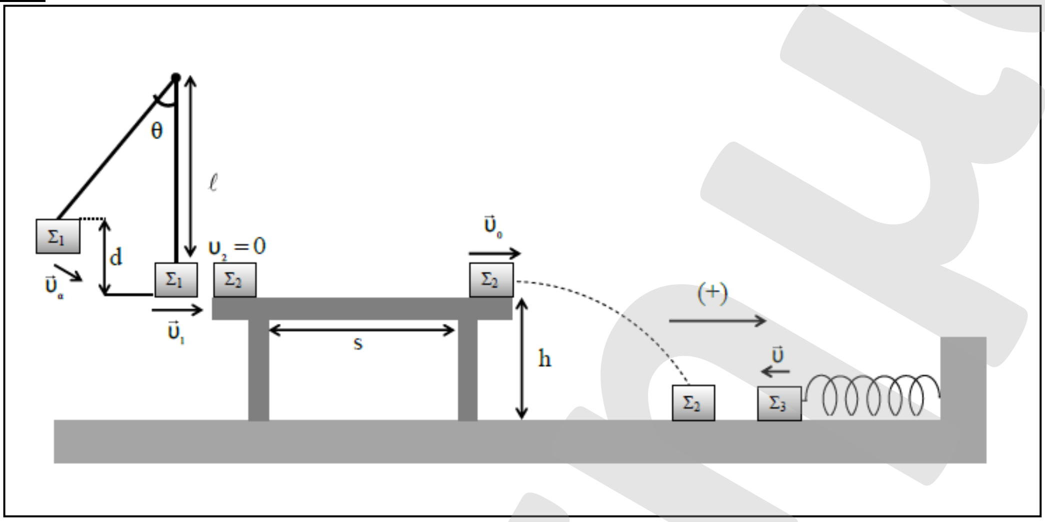
ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

Άσκηση



Σώμα Σ1 μάζας m_1 = 0,4 kg είναι δεμένο στην άκρη αβαρούς, μη εκτατού και ομογενούς νήματος μήκους ℓ = 0,72 m, το άλλο άκρο του οποίου είναι στερεωμένο σε σημείο κατακόρυφου επιπέδου. Εκτρέπουμε το Σ1 κατά γωνία θ, ως προς την κατακόρυφο και το εκτοξεύουμε με ταχύτητα $\upsilon_\alpha=\sqrt{90}\,m/s$. Στο κατώτερο σημείο της τροχιάς του συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα Σ2 μάζας m_2 = 0,1 kg, το οποίο βρίσκεται σε οριζόντιο τραπέζι. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του τραπεζιού και του Σ2 είναι μ = 0,6, ενώ το ύψος του τραπεζιού από το δάπεδο είναι h=1,25 m. Μετά την κρούση το Σ1 αποκτά τέτοια ταχύτητα, ώστε μόλις εκτελεί ανακύκλωση, ενώ το Σ2, αφού διανύσει διάστημα s, φτάνει στην άκρη του τραπεζιού έχοντας οριζόντια ταχύτητα μέτρου υ_0, με την οποία βάλλεται οριζόντια. Αν ο χρόνος κίνησης του Σ2 στο οριζόντιο τραπέζι είναι διπλάσιος του χρόνου πτώσης μέχρι να φτάσει στο δάπεδο, να υπολογιστούν

Α. το συνθ της αρχικής γωνίας εκτροπής.

Β. το διάστημα s καθώς και το μέτρο της ταχύτητας υ_0.

Λίγο πριν το Σ2 ακουμπήσει στο έδαφος, διατηρώντας την οριζόντια ταχύτητά του, συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με σώμα Σ3 μάζας m_3 = 0,9 kg, το οποίο είναι προσδεμένο στο ελεύθερο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k =100 N/m, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Τη στιγμή της κρούσης το σύστημα Σ3-ελατήριο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, ενέργειας E_T = 1,8 J και το Σ3 διέρχεται από τη θέση ισορροπίας κινούμενο προς την αρνητική κατεύθυνση. Αμέσως μετά την κρούση το συσσωμάτωμα Σ2-Σ3 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

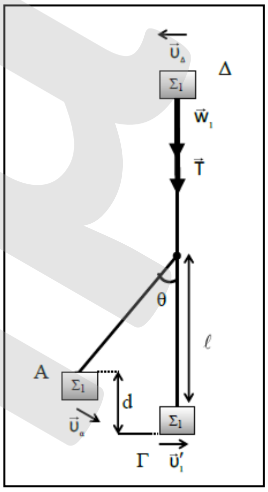
Γ. Να γράψετε την χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης της ταλάντωσης του συσσωματώματος Σ2-Σ3, θεωρώντας ως t=0 τη στιγμή της κρούσης και ως θετική φορά αυτήν της κίνησης του Σ2 πριν την κρούση.

Δ. Να υπολογίσετε την μεταβολή της μηχανικής ενέργειας κατά την κρούση των Σ2-Σ3.

Ε. Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της ταλάντωσης του συσσωματώματος Σ2-Σ3 τη χρονική στιγμή που κινητική του ενέργεια γίνεται ίση με τη δυναμική για πρώτη φορά.
Η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα. Δίνεται $g = 10\ m/s^2$.

Λύση

Α. Εφόσον το Σ1 εκτελεί ανακύκλωση, θα πρέπει στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του Δ να ισχύει $T \geq 0$ (1). Όμως στο σημείο αυτό ισχύει και $\vec{T}+\vec{w}_1=\vec{F}_{\kappa} \Rightarrow T+m_1g=\frac{m_1υ_Δ^2}{\ell} \Rightarrow T=\frac{m_1υ_Δ^2}{\ell}-m_1g$ (2).
Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι η ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να έχει το Σ1 στο σημείο Δ είναι $υ_Δ=\sqrt{g\ell}$.

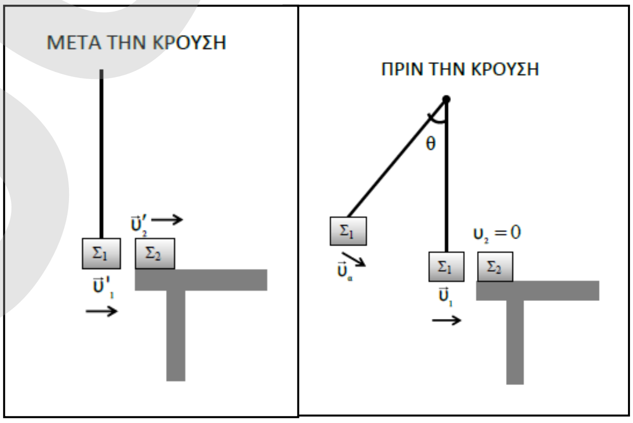


Εφαρμόζοντας την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας μεταξύ των σημείων Γ και Δ για το Σ1 και λαμβάνοντας υπόψη την (3) προκύπτει

$$\frac{1}{2}m_1υ_1'^2=\frac{1}{2}m_1υ_Δ^2+m_1g(2\ell) \Rightarrow υ_1'=\sqrt{5g\ell}=6m/s.$$

Από την Αρχή Διατήρησης της Ορμής για την κεντρική και ελαστική κρούση των Σ1-Σ2, προκύπτει ότι

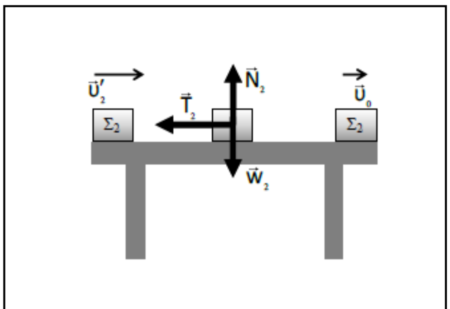
$$υ_1'=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}υ_1 \Rightarrow υ_1=10m/s.$$



Από την εφαρμογή της Αρχής Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας μεταξύ των σημείων Α και Γ για το Σ1 υπολογίζουμε το αρχικό ύψος d από το οποίο αφήνεται το Σ1.
$\frac{1}{2}m_1υ_1^2=\frac{1}{2}m_1υ_α^2+m_1gd \Rightarrow d=0,5m$.

Επομένως $συνθ=\frac{\ell-d}{\ell} \Rightarrow συνθ=\frac{11}{36}$.

Β. Από την Αρχή Διατήρησης της Ορμής για την κεντρική και ελαστική κρούση των Σ1-Σ2, προκύπτει ότι $υ_2'=\frac{2m_1}{m_1+m_2}υ_1 \Rightarrow υ_2'=16m/s$.



Εφόσον ο χρόνος κίνησης του Σ2 στο οριζόντιο επίπεδο είναι διπλάσιος του χρόνου πτώσης, θα ισχύει $t_{op}=2t_{\pi} \Rightarrow t_{op}=2\sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow t_{op}=1s$.

Το Σ2 μετά την κρούση με το Σ1 εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση στο οριζόντιο επίπεδο, λόγω της τριβής με το τραπέζι. Εφαρμόζοντας το 2^o Νόμο του Newton προκύπτει ότι $\alpha=\frac{-T_2}{m_2}=-\frac{\mu m_2 g}{m_2}=-6m/s^2$.

Από τις εξισώσεις κίνησης προκύπτει $\upsilon_0=\upsilon_2^{'}-\alpha t_{op} \Rightarrow \upsilon_0=10m/s$ και $s=\upsilon_2^{'}t_{op}-\frac{1}{2}\alpha t_{op}^2 \Rightarrow s=13m$.

Γ. Εφόσον τη στιγμή της κρούσης το Σ3 διέρχεται από τη Θ.Ι., η ταχύτητά του θα είναι η μέγιστη της ταλάντωσής του, άρα $E_T=\frac{1}{2}m_3\upsilon^2 \Rightarrow \upsilon=2m/s$.

Εφαρμόζοντας την Αρχή Διατήρησης της Ορμής για την κρούση των Σ2-Σ3 στον οριζόντιο άξονα προκύπτει $m_2\upsilon_0-m_3\upsilon=(m_2+m_3)v \Rightarrow v=-0{,}8m/s$.

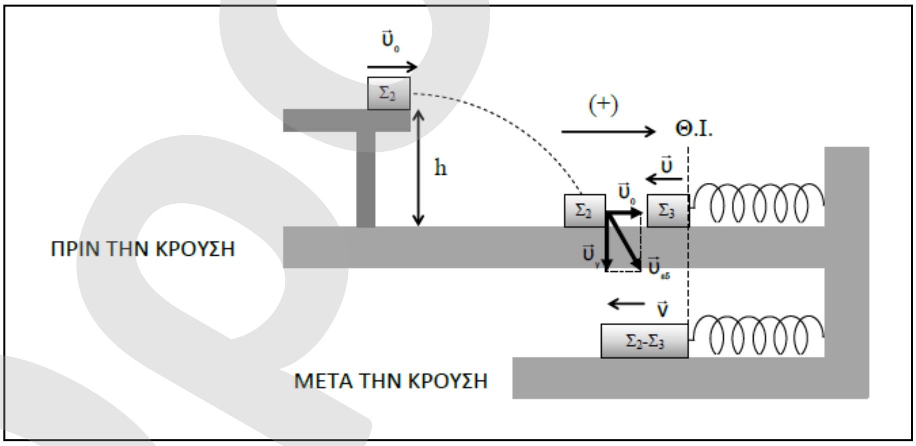
$$D=(m_2+m_3)\omega^2 \Rightarrow k=(m_2+m_3)\omega^2 \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{k}{m_2+m_3}} \Rightarrow \omega=10rad/s$$

Εφόσον δεν αλλάζει η Θ.Ι. μετά την κρούση, η ταχύτητα v που θα αποκτήσει το συσσωμάτωμα Σ2-Σ3 μετά την κρούση θα είναι η μέγιστη της ταλάντωσής του, άρα

$$v=\upsilon_{max} \Rightarrow v=\omega A \Rightarrow v=\sqrt{\frac{k}{m_2+m_3}}A \Rightarrow A=0{,}08m.$$

Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ ισχύει $x(0)=0$ και το συσσωμάτωμα κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση άρα έχει αρχική φάση $\varphi_0=\pi$ rad.
Άρα $x(t) = 0{,}08\ \eta\mu(10t+\pi)$ (SI).

Δ.



Πριν την κρούση:

$K_2=m_2gh+\frac{1}{2}m_2\upsilon_0^2=6{,}25J$

$K_3=E_T=1{,}8J$

Μετά την κρούση:

$$K_{\Sigma2\text{-}\Sigma3}=\frac{1}{2}(m_2+m_3)v^2=0{,}32J$$

Άρα $\Delta E_{MHX}=K_{\Sigma2\text{-}\Sigma3}-(K_2+K_3)\Rightarrow \Delta E_{MHX}=-7{,}73J$.

Ε. Εφαρμόζοντας την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας για την ταλάντωση και λαμβάνοντας υπόψη ότι K = U για πρώτη φορά, έχουμε

$$E=K+U\Rightarrow E=K+K\Rightarrow \frac{1}{2}(m_2+m_3)v^2=2\frac{1}{2}(m_2+m_3)v'^2\Rightarrow v'=-\frac{\sqrt{2}}{2}v$$

$$E=K+U\Rightarrow E=U+U\Rightarrow \frac{1}{2}kA^2=2\frac{1}{2}kx^2\Rightarrow x=-\frac{\sqrt{2}}{2}A$$

$$\frac{dK}{dt}=\sum\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}=-k\cdot x\cdot v'=-k\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}A\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}v'\right)\Rightarrow\frac{dK}{dt}=-3{,}2\,J/s.$$