Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Προτεινόμενα Θέματα 2012

Θέμα 1 Δίνεται συνάρτηση f που είναι αντιστρέψιμη και παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\ \beta]$.
α. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha) - \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx$$

β. Δίνεται $f(x) = 1 + \ln(\sqrt{x-1} + 1)$. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την f^{-1}.
γ. Να υπολογίσετε το $I = \int_1^5 f(x)dx$.
Λύση:
α. Είναι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} (x)' f(x)dx = \big[xf(x)\big]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} xf'(x)dx =$$
$$= \big[xf(x)\big]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}\big(f(x)\big)f'(x)dx$$

Θέτουμε $f(x) = u$, άρα $f'(x)dx = du$ και $u_1 = f(\alpha)$ και $u_2 = f(\beta)$, έτσι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \big[xf(x)\big]_{\alpha}^{\beta} - \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(u)du = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha) - \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx$$

β. $f(x) = 1 + \ln(\sqrt{x-1} + 1),\ D_f = [1,\ +\infty)$.
Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(1,\ +\infty)$, με

$$f'(x) = 0 + \frac{1}{\sqrt{x-1}+1}\big(\sqrt{x-1}+1\big)' = \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}} =$$
$$= \frac{1}{2(x-1) + 2\sqrt{x-1}} > 0$$

για $x \in (1,\ +\infty)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,\ +\infty)$, οπότε θα είναι 1-1 και επομένως ορίζεται η f^{-1}. Έτσι

$$f(x) = y \Leftrightarrow 1 + \ln(\sqrt{x-1}+1) = y \Leftrightarrow \ln(\sqrt{x-1}+1) = y - 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} + 1 = e^{y-1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = e^{y-1} - 1$$

πρέπει $e^{y-1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{y-1} \geq 1 \Leftrightarrow y - 1 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 1$.
Έτσι

$$x - 1 = (e^{y-1} - 1)^2 \Leftrightarrow x = e^{2y-2} - 2e^{y-1} + 1 + 1$$
$$f^{-1}(y) = e^{2y-2} - 2e^{y-1} + 2,\ y \geq 1$$

Οπότε $f^{-1}(x)=e^{2x-2}-2e^{x-1}+2,\ x\geq 1$.

γ.

$$\begin{aligned}I&=\int_1^5 f(x)dx=5f(5)-1f(1)-\int_{f(1)}^{f(5)} f^{-1}(x)dx=\\&=5(1+\ln 3)-1-\int_1^{1+\ln 3}(e^{2x-2}-2e^{x-1}+2)dx=\\&=4+5\ln 3+\Big[-\frac{1}{2}e^{2x-2}+2e^{x-1}-2x\Big]_1^{1+\ln 3}=\\&=4+5\ln 3+\Big(-\frac{1}{2}e^{2\ln 3}+2e^{\ln 3}-2-2\ln 3\Big)-\Big(-\frac{1}{2}e^{0}+2e^{0}-2\Big)=\\&=4+3\ln 3\end{aligned}$$

Θέμα 2 Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{xe^x}{e^x-1} & ,\ x\neq 0\\ 1 & ,\ x=0\end{cases}$.

Α. Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια και ως προς την παραγωγισιμότητά της στο $x_0=0$.

Β. α. Να αποδείξετε ότι $xe^x-e^x+1>0$, για κάθε $x>0$.

β. Να αποδείξετε ότι $f(x)>1$, για κάθε $x>0$.

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$,
$h(x)=\dfrac{1}{x}$ και τις ευθείες $x=1,\ x=e$.

<u>Λύση</u>

Α. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x}{e^x-1}\overset{(\frac{0}{0})}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(xe^x)'}{(e^x-1)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+xe^x}{e^x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)=1=f(0)$.
Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Ο λόγος μεταβολής της f είναι, για κάθε $x\neq 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{\frac{xe^x}{e^x-1}-1}{x}=\dfrac{xe^x-e^x+1}{xe^x-x}$,
οπότε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x-e^x+1}{xe^x-x}\overset{(\frac{0}{0})}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(xe^x-e^x+1)'}{(xe^x-x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x}{e^x+xe^x-1}\overset{(\frac{0}{0})}{=}$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(xe^x)'}{(e^x+xe^x-1)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+xe^x}{e^x+e^x+xe^x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x}{2+x}=\dfrac{1}{2}$.

Β. α. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=xe^x-e^x+1$. Επειδή η g συνεχής στο $[0,+\infty)$ και $g'(x)=e^x+xe^x-e^x=xe^x>0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$, η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.
Άρα για κάθε $x>0$ ισχύει $g(x)>g(0)\ \Leftrightarrow\ xe^x-e^x+1>0$.

β. Για κάθε $x>0$ είναι $f(x)>1\ \Leftrightarrow\ \dfrac{xe^x}{e^x-1}>1\ \Leftrightarrow\ \dfrac{xe^x}{e^x-1}-1>0\ \Leftrightarrow$
$\dfrac{xe^x-e^x+1}{e^x-1}>0$. Ισχύει διότι $xe^x-e^x+1>0$ λόγω του ερωτήματος (α) και $e^x-1>0$,

για κάθε $x > 0$.

γ. Επειδή οι g και h είναι συνεχείς στο $[1, e]$, το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = \int_1^e |g(x) - h(x)| dx$. Αλλά για κάθε $x \in [1, e]$ είναι $g(x) - h(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{x} - \dfrac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow f(x) > 1$, που ισχύει (ερώτημα β).

Άρα $E = \int_1^e \Big(g(x) - h(x)\Big) dx = \int_1^e \dfrac{e^x}{e^x - 1} dx - \int_1^e \dfrac{1}{x} dx = \int_1^e \Big(\ln(e^x - 1)\Big)' - \int_1^e (\ln x)' dx = \Big[\ln(e^x - 1)\Big]_1^e - \Big[\ln x\Big]_1^e = \ln(e^e - 1) - \ln e + \ln 1 = \ln(e^e - 1) - \ln\big[e(e-1)\big] = \ln \dfrac{e^e - 1}{e^2 - e}$ τ.μ.