Θέμα

Αν X μια μεταβλητή με τιμές $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$, όπου $\nu_1,\, \nu_2 > 0$ οι αντίστοιχες συχνότητες, $\overline{x}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση, τότε:

Α. να αποδείξετε ότι $s^2 = \overline{x}(1-\overline{x})$,

Β. να αποδείξετε ότι: $\overline{x} = \dfrac{1}{1+CV^2}$.

Γ. Αν A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με

$$P(A) = \overline{x} \text{ και}$$

$$P(B) = \frac{CV^2+\alpha}{1+CV^2}, \text{ με } \alpha \in (0,\, 1).$$

Να εξετάσετε αν τα A, B είναι ασυμβίβαστα.

Δ. Αν επιπλέον $s = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ και $P(A) < P(A')$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x^2 - x + P(A \cap B) = 0$$

έχει πραγματικές ρίζες.

Λύση

Α. Είναι $\nu_1 + \nu_2 = \nu$, οπότε

$$\overline{x} = \frac{x_1\nu_1 + x_2\nu_2}{\nu_1+\nu_2} \Leftrightarrow \overline{x} = \frac{0\cdot\nu_1 + 1\cdot\nu_2}{\nu_1+\nu_2} \Leftrightarrow \overline{x} = \frac{\nu_2}{\nu_1+\nu_2} \quad (1)$$

Επίσης

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{2} {x_i}^2\nu_i - \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{2} x_i\nu_i\right)^2}{\nu}\right\} \Leftrightarrow s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{2} {x_i}^2\nu_i - \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{2} x_i\nu_i\right)^2}{\nu^2} \Leftrightarrow$$

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{2} {x_i}^2\nu_i - (\overline{x})^2 \Leftrightarrow s^2 = \frac{0^2\cdot\nu_1 + 1^2\cdot\nu_2}{\nu_1+\nu_2} - \left(\frac{\nu_2}{\nu_1+\nu_2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$s^2 = \frac{\nu_2}{\nu_1+\nu_2} - \left(\frac{\nu_2}{\nu_1+\nu_2}\right)^2 \Leftrightarrow s^2 = \frac{\nu_2}{\nu_1+\nu_2}\left(1 - \frac{\nu_2}{\nu_1+\nu_2}\right)$$

Άρα από (1) προκύπτει ότι $s^2 = \overline{x}(1-\overline{x})$.

Β. Από το προηγούμενο ερώτημα και αφού $\overline{x} = \dfrac{\nu_2}{\nu_1+\nu_2} > 0$ προκύπτει ότι

$$s^2 = \overline{x} - (\overline{x})^2 \Leftrightarrow \frac{s^2}{(\overline{x})^2} = \frac{1}{\overline{x}} - 1 \Leftrightarrow CV^2 = \frac{1}{\overline{x}} - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\overline{x}} = CV^2 + 1 \Leftrightarrow \overline{x} = \frac{1}{CV^2+1}$$

Γ. Έστω ότι A, B είναι ασυμβίβαστα, τότε από τον απλό προσθετικό νόμο θα έχουμε:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{1+CV^2} + \frac{CV^2+\alpha}{1+CV^2} = \frac{1+CV^2+\alpha}{1+CV^2} > \frac{1+CV^2}{1+CV^2} = 1,$$

αφού $\alpha > 0$.

Επομένως $P(A\cap B) > 1$ άτοπο. Άρα τα A, B δεν είναι ασυμβίβαστα.

Δ. Αφού $s^2 = \overline{x}\,(1-\overline{x})$ και $P(A) = \overline{x}$ θα έχουμε:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = P(A)\,[1-P(A)] \Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{16} = P(A) - (P(A))^2 \Leftrightarrow$$

$$16\,(P(A))^2 - 16P(A) + 3 = 0$$

Λύνοντας τη δευτεροβάθμια εξίσωση έχουμε ότι $P(A) = \frac{1}{4}$ ή ότι $P(A) = \frac{3}{4}$.

Όμως αν $P(A) = \frac{1}{4}$ θα είναι $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$,

ενώ αν $P(A) = \frac{3}{4}$ θα είναι $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$

και αφού $P(A) < P(A')$ θα είναι $P(A) = \frac{1}{4}$.

Η εξίσωση $x^2 - x + P(A\cup B) = 0$ θα έχει διακρίνουσα

$$\Delta = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot P(A\cap B) = 1 - 4P(A\cap B)$$

Γενικά ισχύει ότι $A\cap B \subseteq A$, οπότε $P(A\cap B) \leq P(A)$

Ισοδύναμα επομένως έχουμε:

$$P(A\cap B) \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4P(A\cap B) \leq 1 \Leftrightarrow 1 - 4P(A\cap B) \geq 0 \Leftrightarrow \Delta \geq 0$$

Επομένως η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.