Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης

Θέμα 1 Έστω f συνεχής στο $[\alpha,\ \beta]$, παραγωγίσιμη στο $(\alpha,\ \beta)$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha,\ \beta)$. Να δείξετε ότι:

α. $f(\alpha) \neq f(\beta)$

β. Υπάρχει $\gamma \in (\alpha,\ \beta)$, τέτοιο ώστε $3f(\gamma) = f(\alpha) + 2f(\beta)$

γ. Υπάρχουν $\xi_1,\ \xi_2 \in (\alpha,\ \beta)$, τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2) > 0$.

Λύση

α. Η f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\ \beta]$ και παραγωγίσιμη στο $(\alpha,\ \beta)$, άρα από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\ \beta) :\ f'(x_0) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$.

Όμως $f'(x) \neq 0,$ για κάθε $x \in (\alpha,\ \beta)$, άρα

$$f'(x_0) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \neq 0 \overset{\beta \neq \alpha}{\Longleftrightarrow} f(\beta) - f(\alpha) \neq 0 \Leftrightarrow f(\alpha) \neq f(\beta)$$

β. Έστω $F(x) = 3f(x) - f(\alpha) - 2f(\beta)$

Η F είναι συνεχής στο $[\alpha,\ \beta]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Έτσι είναι

$F(\alpha) = 3f(\alpha) - f(\alpha) - 2f(\beta) = 2f(\alpha) - 2f(\beta) = 2\big[f(\alpha) - f(\beta)\big] = -2\big[f(\beta) - f(\alpha)\big]$.

$F(\beta) = 3f(\beta) - f(\alpha) - 2f(\beta) = f(\beta) - f(\alpha)$.

Επομένως $F(\alpha)\cdot F(\beta) = -2\big[f(\beta)-f(\alpha)\big]\Big[f(\beta)-f(\alpha)\Big] = -2\Big[f(\beta)-f(\alpha)\Big]^2 < 0$, διότι $f(\alpha) \neq f(\beta)$ και έτσι $\Big[f(\beta) - f(\alpha)\Big]^2 > 0$.

Από το Θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\gamma \in (\alpha,\ \beta)$ ώστε

$$F(\gamma) = 0 \Leftrightarrow 3f(\gamma) - f(\alpha) - 2f(\beta) = 0 \Leftrightarrow 3f(\gamma) = f(\alpha) + 2f(\beta)$$

γ. Η f είναι συνεχής στα $[\alpha,\ \gamma]$ και $[\gamma,\ \beta]$ και παραγωγίσιμη στα $(\alpha,\ \gamma)$ και $(\gamma,\ \beta)$.

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής προκύπτει ότι:

- Υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha,\ \gamma) :\ f'(\xi_1) = \dfrac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha}$
- Υπάρχει $\xi_2 \in (\gamma,\ \beta) :\ f'(\xi_2) = \dfrac{f(\beta) - f(\gamma)}{\beta - \gamma}$

Έτσι

$$f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2) = \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha}\cdot\frac{f(\beta) - f(\gamma)}{\beta - \gamma} = \frac{\Big[f(\gamma) - f(\alpha)\Big]\cdot\Big[f(\beta) - f(\gamma)\Big]}{(\gamma - \alpha)\cdot(\beta - \gamma)} \quad (1)$$

Είναι $(\gamma - \alpha)(\beta - \gamma) > 0$, διότι $\alpha < \gamma < \beta$ και έτσι αντικαθιστώντας στην (1) $f(\gamma) = \dfrac{f(\alpha) + 2f(\beta)}{3}$, από το προηγούμενο ερώτημα, προκύπτει:

$$f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2) = \frac{\Big[2f(\beta) - 2f(\alpha)\Big]\cdot\Big[f(\beta) - f(\alpha)\Big]}{9(\gamma - \alpha)\cdot(\beta - \gamma)} = \frac{2\Big[f(\beta) - f(\alpha)\Big]^2}{9(\gamma - \alpha)\cdot(\beta - \gamma)} > 0$$

διότι $f(\alpha) \neq f(\beta)$ από το (α.) και έτσι $\Big[f(\beta) - f(\alpha)\Big]^2 > 0$

Θέμα 2 Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ορίζουμε $f(z) = i \cdot (z^2+1) + z$.

α. Να βρείτε τις τιμές του θετικού ακεραίου ν για τις οποίες ισχύει $\big(f(i)\big)^{\nu} + \big(f(-i)\big)^{\nu} = 2$.

β. Να αποδείξετε ότι $Re\big(f(z)\big) = Re(z)\big(1 - 2Im(z)\big)$.

γ. Να λυθεί η εξίσωση $\dfrac{f(z) - f(\overline{z})}{8} = -1 + i$.

Λύση

α. Είναι

$$f(i) = i \cdot (i^2+1) + i = i \cdot (-1+1) + i = i \cdot 0 + i = i \text{ και}$$
$$f(-i) = i \cdot \big((-i)^2+1\big) + (-i) = i \cdot (-1+1) - i = -i.$$

Αν ν θετικός ακέραιος τότε:

$$\big(f(i)\big)^{\nu} + \big(f(-i)\big)^{\nu} = i^{\nu} + (-i)^{\nu} = \begin{cases} 1+1=2 & , \text{ αν } \nu = 4\rho \\ i-i=0 & , \text{ αν } \nu = 4\rho+1 \\ -1-1=-2 & , \text{ αν } \nu = 4\rho+2 \\ -i+i=0 & , \text{ αν } \nu = 4\rho+3 \end{cases}, \ \rho \text{ θετικός ακέραιος}$$

Άρα για όλα τα θετικά πολλαπλάσια του 4 ισχύει $\big(f(i)\big)^{\nu} + \big(f(-i)\big)^{\nu} = 2$

β. Είναι $z = x + yi,\ x,\ y \in \mathbb{R}$, οπότε:

$$\begin{aligned} f(z) &= i \cdot (z^2+1) + z = i \cdot [(x+yi)^2+1] + (x+yi) = i \cdot [x^2 + 2xyi + (y \cdot i)^2 + 1] + x + yi \\ &= x^2 i - 2xy - y^2 i + i + x + yi = (x - 2xy) + (x^2 - y^2 + y + 1)i \end{aligned}$$

Άρα $Re\big(f(z)\big) = x - 2xy = x(1-2y) = Re(z)\big(1 - 2Im(z)\big)$.

γ. Είναι

$$f(z) - f(\overline{z}) = -8 + 8i \Leftrightarrow i \cdot (z^2+1) + z - i \cdot (\overline{z}^2+1) - \overline{z} = -8 + 8i \Leftrightarrow$$
$$i(z^2 + 1 - \overline{z}^2 - 1) + z - \overline{z} = -8 + 8i \Leftrightarrow i(z - \overline{z})(z + \overline{z}) + z - \overline{z} = -8 + 8i \overset{z=x+yi}{\Longleftrightarrow}$$
$$i(2yi) \cdot 2x + 2yi = -8 + 8i \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 2 \\ 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 4 \end{cases}$$

Επομένως ο ζητούμενος μιγαδικός είναι ο $z = \dfrac{1}{2} + 4i$.