



**ΘΕΜΑ Α**

- A1. Σελίδα 65 σχολικού βιβλίου.  
A2. Σελίδα 87 σχολικού βιβλίου.  
A3. Σελίδα 27 σχολικού βιβλίου.  
A4. α. Λάθος  
β. Σωστό  
γ. Σωστό  
δ. Λάθος  
ε. Σωστό

**ΘΕΜΑ Β**

B1. Είναι  $f'(x) = x^2 - 2x - 3$

B2. Λύνουμε την εξίσωση:

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Delta = 4 + 12 = 16$$

$$\text{άρα } x_1 = \frac{2-4}{2} = -1 \text{ και } x_2 = \frac{2+4}{2} = 3.$$

| x     | $-\infty$ | -1 | 3 | $+\infty$ |
|-------|-----------|----|---|-----------|
| f'(x) | +         | 0  | 0 | +         |
| f(x)  |           |    |   |           |

Η  $f(x)$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(-\infty, -1]$  και στο  $[3, +\infty)$ .

Η  $f(x)$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[-1, 3]$ .

$$\text{Για } x = -1 \text{ έχει τοπικό μέγιστο } f(-1) = -\frac{1}{3} - 1 + 3 + 1 = \frac{8}{3}$$

Για  $x=3$  έχει τοπικό ελάχιστο  $f(3)=\frac{27}{3}-9-9+1=-8$

**B3** Είναι  $f(0)=1$  άρα  $A(0,1)$ .

Η εφαπτομένη έχει εξίσωση της μορφής  $y=\lambda x+\beta$ , όπου  $\lambda=f'(0)=-3$  άρα τελικά  $y=-3x+\beta$ .

Επίσης διέρχεται από το σημείο  $A(0,1)$  άρα:

$$1=0+\beta \Leftrightarrow \beta=1$$

Έτσι η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y=-3x+1$$

**B4.** Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-2x-3}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-3)}{x+1} = -4$$

#### ΘΕΜΑ Γ

Ο αριθμός των βιβλίων που διάβασαν οι επτά μαθητές είναι:

4,5,4,κ,0,3,7

**Γ1.** Είναι  $\bar{x}=4$ .

Άρα:

$$\frac{4+5+4+\kappa+0+3+7}{7}=4 \Leftrightarrow$$

$$\frac{23+\kappa}{7}=4 \Leftrightarrow$$

$$23+\kappa=28 \Leftrightarrow$$

$$\kappa=5$$

**Γ2.** Για  $\kappa=5$  οι παρατηρήσεις είναι:

4, 5, 4, 5, 0, 3, 7

Τις διατάσσουμε σε αύξουσα σειρά:

0, 3, 4, 4, 5, 5, 7

Επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι  $n=7$ , η διάμεσος είναι η μεσαία, δηλαδή η 4<sup>η</sup> παρατήρηση. Άρα:

$$\delta=4$$

**Γ3.** Είναι  $\bar{x}=4$ .

Η διακύμανση είναι:

$$\begin{aligned}
 s^2 &= \frac{(4-4)^2 + (5-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2 + (0-4)^2 + (3-4)^2 + (7-4)^2}{7} = \\
 &= \frac{0^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2 + (-4)^2 + (-1)^2 + 3^2}{7} = \\
 &= \frac{0 + 1 + 0 + 1 + 16 + 1 + 9}{7} = \\
 &= \frac{28}{7} = 4
 \end{aligned}$$

- Γ4.** Είναι  $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4} = 2$ .  
Ο συντελεστής μεταβολής είναι:

$$\begin{aligned}
 CV &= \frac{s}{\bar{x}} \\
 CV &= \frac{2}{4} = 0,5 \quad \text{ή} \quad CV = 50\%
 \end{aligned}$$

Επειδή:

$$CV = 50\% > 10\%,$$

το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

#### ΘΕΜΑ Δ

- Δ1.** Έστω  $x$  η μία πλευρά του ορθογωνίου και  $y$  η άλλη πλευρά του.

Επειδή το εμβαδόν του οικοπέδου είναι  $100\text{m}^2$ , έχουμε:

$$xy = 100$$

Άρα:

$$y = \frac{100}{x}, \text{ με } x > 0$$

Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι:

$$\Pi = 2x + 2y = 2x + 2 \cdot \frac{100}{x} = 2x + \frac{200}{x}$$

$$\text{Άρα } \Pi(x) = 2x + \frac{200}{x}, \quad x > 0.$$

- Δ2.** Είναι:

$$\Pi(x) = 2x + \frac{200}{x}, \quad x > 0$$

Άρα:

$$\begin{aligned}
 \Pi'(x) &= 2 - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^2 - 200}{x^2} \\
 &= \frac{2(x^2 - 100)}{x^2} = \frac{2(x-10)(x+10)}{x^2}
 \end{aligned}$$

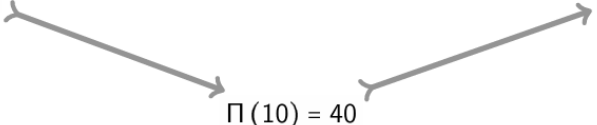
Είναι  $x > 0$ , οπότε έχουμε:

$$x^2 > 0 \text{ και } x+10 > 0$$

Άρα το πρόσημο της  $\Pi'(x)$  εξαρτάται από το πρόσημο του  $x-10$ .

$$\text{Έτσι } \Pi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10.$$

Προκύπτει επομένως ο παρακάτω πίνακας:

|           |   |                                                                                    |           |
|-----------|---|------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| $x$       | 0 | 10                                                                                 | $+\infty$ |
| $\Pi'(x)$ |   | - 0 +                                                                              |           |
| $\Pi(x)$  |   |  |           |

Άρα η  $\Pi$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $(0,10]$  και γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[10,+\infty)$ .

Επομένως η  $\Pi$  παρουσιάζει ελάχιστο για  $x=10$  m.

Τότε:

$$y = \frac{100}{x} = \frac{100}{10} = 10$$

Άρα:

$$x = y = 10$$

Επομένως το ορθογώνιο με τη μικρότερη περίμετρο είναι τετράγωνο με πλευρά 10m.

- Δ3.** Έστω  $x_1, x_2 \in (0,10)$  με  $x_1 < x_2$ . Στο διάστημα  $(0,10)$  η συνάρτηση  $\Pi$  είναι γνησίως φθίνουσα και αφού είναι  $x_1 < x_2$  έχουμε:

$$\Pi(x_1) > \Pi(x_2)$$

Επομένως:

$$\Pi(x_1) - \Pi(x_2) > 0$$

Επίσης, επειδή  $x_1 < x_2$ , έχουμε:

$$x_1 - x_2 < 0$$

Άρα:

$$A = \frac{\Pi(x_1) - \Pi(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

- Δ4.** Είναι:

$$\Pi'(x) = 2 - \frac{200}{x^2}$$

Άρα:

$$\Pi'(x) = \frac{2(x-10)(x+10)}{x^2}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\Pi'(x)}{\sqrt{10x} - 10} &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\frac{2(x-10)(x+10)}{x^2}}{\sqrt{10x} - 10} \\&= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x-10)(x+10)}{x^2(\sqrt{10x} - 10)} \\&= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x-10)(x+10)(\sqrt{10x} + 10)}{x^2(10x - 100)} \\&= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x-10)(x+10)(\sqrt{10x} + 10)}{10x^2(x-10)} \\&= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{(x+10)(\sqrt{10x} + 10)}{5x^2} \\&= \frac{(10+10)(\sqrt{100} + 10)}{5 \cdot 10^2} \\&= \frac{20 \cdot (10+10)}{500} = \frac{400}{500} = \frac{4}{5}\end{aligned}$$