

ΤΑΞΗ: Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Τετάρτη 23 Απριλίου 2025
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[α,β]$.

Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[α,β]$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt \approx G(\beta) - G(\alpha)$$

Μονάδες 7

A2. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f ;

Μονάδες 3

A3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία.

Μονάδες 5

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη

(α) Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ τότε είναι και 1-1 στο Δ

(β) Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f .

(γ) Για κάθε αντιστρέψιμη συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ Ισχύει $f^{-1}(f(y)) = y$,
 $y \in A$

(δ) Αν οι συναρτήσεις f', g' είναι συνεχείς σε ένα διάστημα $[α, β]$ τότε

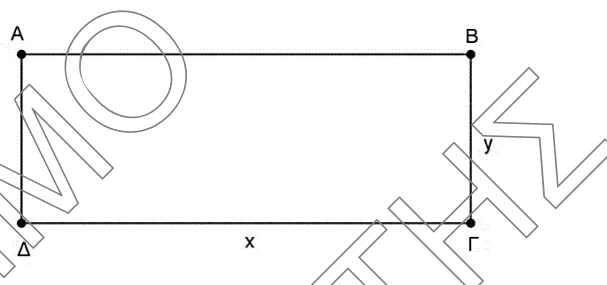
$$\text{ισχύει } \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx$$

(ε) Αν $0 \leq f(x) \leq 1$ κοντά στο 0, τότε $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 f(x)) = 0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Το διπλανό ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει διαστάσεις x, y και σταθερή περίμετρο $8m$.



B1. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογώνιου είναι :

$$E(x) = -x^2 + 4x, x \in (0, 4)$$

Μονάδες 5

B2. Να αποδείξετε ότι εμβαδόν του γίνεται μέγιστο όταν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

Μονάδες 7

B3. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $E(x)$ οι οποίες διέρχονται από το σημείο $A(2, 5)$

Μονάδες 7

B4. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu E'(x)}{E'(x) \cdot E(x) - 4E'(x)}$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \beta x + f(\alpha) & , x > 0 \\ x(e^x + 1) + \alpha & , x \leq 0 \end{cases} \quad \text{με } \alpha \leq 0 \text{ και } \beta \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να δείξετε ότι $\alpha = 0$ και $\beta = 2$

Μονάδες 4

Γ2. (i) Να βρείτε το σημείο καμπής της f .

Μονάδες 5

(ii) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) - f(-2) = (x+2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h-2) - f(-2)}{h}$$

Μονάδες 3

Γ3. (i) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 5

(ii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(f(x)) = 2025$

Μονάδες 3

Γ4. Να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = x$ είναι ασύμπτωτη της f στο $-\infty$ και στην συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f , την ε και την ευθεία $x = -1$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln x$ με $A = (0, +\infty)$

Δ1. Να δείξετε ότι η f έχει μόνο μία οριζόντια εφαπτομένη

στο σημείο $M(a, f(a))$ με $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

Μονάδες 5

Δ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) + a \cdot e^x - x$, $x \in A$ παρουσιάζει ακρότατο στο κρίσιμο σημείο της f

Μονάδες 5

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{g(2\alpha + f(x)) - g(1 + f(\alpha))}{g(x) - e^{\alpha} - 1}$

Μονάδες 5

Δ4. Έστω F αρχική της συνάρτησης $h(x) = g(x^2) - f(x^2)$, $x \in (0, +\infty)$

για την οποία ισχύει ότι $e^x \geq \left(\int_{\alpha}^{\beta} F(t) dt \right)_{x+1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με

$\beta > \alpha > 0$ να δείξετε ότι

i. $\int_{\alpha}^{\beta} F(x) dx = 1$

Μονάδες 5

ii. $\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(\alpha e^{x^2} - x^2) dx = (\beta - \alpha)F(\beta) - 1$

Μονάδες 5