

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2025**
Β' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ3Θ0(α)

ΤΑΞΗ: Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Τετάρτη 23 Απριλίου 2025
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 217
A2. Ορισμός σχολικού βιβλίου σελίδα 162
A3. Σελίδα 128 σχολικού βιβλίου.
A4. (α) Σωστό (β) Σωστό (γ) Σωστό (δ) Λάθος (ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Από το ότι η περίμετρος του είναι 8cm ισχύει ότι

$$2x + 2y = 8 \Leftrightarrow x + y = 4 \Leftrightarrow y = 4 - x$$

Για το εμβαδόν του ισχύει $E = x \cdot y$ άρα $E(x) = x \cdot (4 - x) \Leftrightarrow E(x) = -x^2 + 4x$

Πρέπει $x > 0$ και $y > 0 \Leftrightarrow 4 - x > 0 \Leftrightarrow x < 4$

Επομένως $E(x) = -x^2 + 4x, x \in (0, 4)$

B2. Η $E(x)$ παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, 4)$ με $E'(x) = -2x + 4$

- $E'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 4 = 0 \Leftrightarrow -2x = -4 \Leftrightarrow x = 2$
- $E'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x + 4 > 0 \Leftrightarrow -2x > -4 \Leftrightarrow x < 2$

Άρα έχουμε τον παρακάτω πίνακα πρόσημου της $E'(x)$ και μονοτονίας της $E(x)$

x	0	2	4
E(x)		+	-
E'(x)		↗	↘

Στο διάστημα $(0,2]$ η $E(x)$ είναι γνησίως αύξουσα ενώ στο διάστημα $[2,4)$ η $E(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Στη θέση $x = 2$ το εμβαδόν γίνεται μέγιστο με τιμή $E(2) = 4\text{m}^2$ ενώ όταν $x = 2$ τότε και $y = 2$, άρα το $ΑΒΓΔ$ είναι τετράγωνο.

B3. Έστω $M(x_0, E(x_0))$ σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $E(x)$ με $x_0 \in (0,4)$

Η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο M είναι $(\varepsilon): y - E(x_0) = E'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Η (ε) διέρχεται από το σημείο $A(2,5)$ άρα $(\varepsilon): 5 - E(x_0) = E'(x_0) \cdot (2 - x_0)$

Αντικαθιστώντας τα $E(x_0) = -x_0^2 + 4x_0$ και $E'(x_0) = -2x_0 + 4$

Έχουμε $5 + x_0^2 - 4x_0 = (-2x_0 + 4) \cdot (2 - x_0) \Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 + 3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$ ή $x_0 = 3$

Άρα $(\varepsilon_1): y - E(1) = E'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 3 = 2(x - 1) \Leftrightarrow y = 2x + 1$

$(\varepsilon_2): y - E(3) = E'(3)(x - 3) \Leftrightarrow y - 3 = -2(x - 3) \Leftrightarrow y = -2x + 9$

B4. Για το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu E'(x)}{E'(x) \cdot E(x) - 4E'(x)}$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu E'(x)}{E'(x) \cdot E(x) - 4E'(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{\eta\mu E'(x)}{E'(x)} \cdot \frac{1}{E(x) - 4} \right] = -\infty \text{ διότι :}$$

- $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\eta\mu E'(x)}{E'(x)} \right)$ θέτουμε $E'(x) = u$ και $u_0 = \lim_{x \rightarrow 2} E'(x) = 0$ άρα $\lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu u}{u} \right) = 1$
- Η $E(x)$ έχει μέγιστο το 4 άρα ισχύει $E(x) \leq 4$ για κάθε $x \in (0,4)$

Για τιμές του x κοντά στο 2 ισχύει $E(x) < 4 \Leftrightarrow E(x) - 4 < 0$

και $\lim_{x \rightarrow 2} (E(x) - 4) = 0$ άρα $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{E(x) - 4} = -\infty$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} θα είναι και συνεχής επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \quad \text{(I)}$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x(e^x + 1) + \alpha) = \alpha$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \beta x + f(\alpha)) = f(\alpha)$
- $f(0) = \alpha$

Άρα από την σχέση (I) έχουμε ότι

$$f(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \alpha(e^{\alpha} + 1) = \alpha \Leftrightarrow \alpha e^{\alpha} + \alpha = \alpha \Leftrightarrow \alpha e^{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

Η f παραγωγίσιμη στο $x = 0$ άρα $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = L \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \stackrel{f(0)=\alpha=0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(e^x + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x + 1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + \beta x + f(\alpha)}{x} \stackrel{f(\alpha)=0}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + \beta x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x + \beta)}{x} = \beta$$

Επομένως $\beta = 2$

Γ2. (i) Για $\alpha = 0$ και $\beta = 2$ έχουμε $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x > 0 \\ xe^x + x, & x \leq 0 \end{cases}$

Η f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) = \begin{cases} 2x + 2, & x > 0 \\ e^x + xe^x + 1, & x \leq 0 \end{cases}$

Για $x > 0$ έχουμε $f''(x) = 2$ άρα η f κυρτή στο $[0, +\infty)$

Για $x < 0$ έχουμε $f''(x) = e^x(x+2)$

Άρα $f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x+2) = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Το πρόσημο της f'' είναι ίδιο με το πρόσημο του $x+2$ εφόσον $e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Επομένως

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	○	+	+
$f(x)$	↷		↶	↷

Άρα η f κοίλη στο $(-\infty, -2]$ και η f κυρτή στο $[-2, +\infty)$

Το σημείο $M(-2, f(-2))$ ή $M(-2, -2e^{-2} - 2)$ είναι το σημείο καμπής της f .

(ii) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = f'(-2)$

Άρα η εξίσωση $f(x) - f(-2) = (x+2) \cdot f'(-2) \Leftrightarrow f(x) = f'(-2)(x+2) + f(-2)$ γίνεται

Το δεύτερο μέλος της εξίσωσης είναι η εξίσωση εφαπτομένης της f στο σημείο καμπής της.

Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη στο σημείο καμπής της διαπερνά την γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Η f κυρτή στο διάστημα $(-2, +\infty)$ άρα $f(x) > f'(-2)(x+2) + f(-2)$ για κάθε $x > -2$

Η f κοίλη στο διάστημα $(-\infty, -2)$ άρα $f(x) < f'(-2)(x+2) + f(-2)$ για κάθε $x < -2$

Άρα η εξίσωση $f(x) = f'(-2)(x+2) + f(-2)$ έχει μοναδική λύση την $x = -2$

Γ3.(i) Από το πρόσημο της f'' προκύπτει η μονοτονία της f'

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	○	+	+
$f'(x)$	↘		↗	

Η f' είναι συνεχής στο $x=0$ αφού $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = f'(0) = 2$

Η f' γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -2]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-2, +\infty)$

Στη θέση $x = -2$ έχει ολικό ελάχιστο το $f'(-2) = -\frac{1}{e^2} + 1 > 0$

Άρα $f'(x) \geq f'(-2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ επομένως η f γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Η f συνεχής το $A = (-\infty, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα άρα :

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty)$$

διότι :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x(e^x + 1)) = -\infty$ αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

(ii) Η εξίσωση $f(f(x)) = 2025$, έχει πεδίο ορισμού το \mathbb{R} αφού $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) \in \mathbb{R}$

Το 2025 ανήκει στο σύνολο τιμών της f άρα θα υπάρχει $x_0 \in A = \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 2025$, το x_0 μοναδικό διότι η f είναι γνησίως αύξουσα .

$$f(f(x)) = 2025 \Leftrightarrow f(f(x)) = f(x_0) \stackrel{f:1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = x_0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει μία μόνο λύση αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και έχει σύνολο τιμών το \mathbb{R} , δηλαδή η ευθεία $y = x_0$ τέμνει την C_f ακριβώς μία φορά .

Γ4. Θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = 0$

Πράγματι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x + x - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) = 0$$

Τα κοινά σημεία της $f(x)$ με την $y = x$ είναι $f(x) = x \Leftrightarrow x = 0$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$\begin{aligned} E &= \int_{-1}^0 |f(x) - x| dx = \int_{-1}^0 |xe^x| dx = \int_{-1}^0 -xe^x dx = \int_{-1}^0 -x(e^x)' dx = [-xe^x]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 -e^x dx \\ &= [-xe^x]_{-1}^0 + [e^x]_{-1}^0 = [e^x - xe^x]_{-1}^0 = 1 - (e^{-1} + e^{-1}) = 1 - \frac{2}{e} = \frac{e-2}{e} \text{ τ.μ} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f δύο φορές παραγωγίσιμη στο A με $f'(x) = e^x - \frac{1}{x}$

- Η f' συνεχής στο κλειστό διάστημα $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$
- $f'\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}} - 2 = \sqrt{e} - 2 < 0$ και $f'(1) = e - 1 > 0$ άρα $f'\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f'(1) < 0$

Οπότε από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ για το οποίο ισχύει $f'(\alpha) = 0$ δηλαδή στο σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$ η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια εφαπτομένη.

Όμως $f''(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x \in A$ οπότε η $f'(x)$ γνησίως αύξουσα άρα και 1-1 οπότε η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μοναδική λύση την $x = \alpha$ άρα η οριζόντια εφαπτομένη είναι μοναδική.

Δ2. Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $g'(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα την $x = \alpha$ και εκατέρωθεν αυτής η f' αλλάζει πρόσημο.

Σημείωση το $x = \alpha$ είναι το κρίσιμο σημείο της f αφού εκεί η παράγωγός της μηδενίζεται.

Η g παραγωγίσιμη με $g'(x) = e^x - \frac{1}{x} + \alpha e^x - 1$

$$g'(\alpha) = e^\alpha - \frac{1}{\alpha} + \alpha e^\alpha - 1, \text{ όμως από το } \Delta 1. f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e^\alpha - \frac{1}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \boxed{e^\alpha = \frac{1}{\alpha}}$$

$$\text{Οπότε } g'(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} + \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} - 1 = 0$$

$g''(x) = e^x + \frac{1}{x^2} + \alpha e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{A}$ αφού και $\alpha > 0$ άρα η g' γνησίως αύξουσα

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow g'(x) > g'(\alpha) \Leftrightarrow x > \alpha$$

και

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow g'(x) < g'(\alpha) \Leftrightarrow 0 < x < \alpha$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, \alpha]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\alpha, +\infty)$ ενώ στη θέση $x = \alpha$ έχει ελάχιστο το $\boxed{g(\alpha) = e^\alpha - \ln \alpha + \alpha e^\alpha - 1}$

Δ3.

- Για το όριο του παρονομαστή έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = g(\alpha) = e^\alpha - \ln \alpha + \alpha e^\alpha - \alpha = e^\alpha + \alpha + \alpha \frac{1}{\alpha} - 1 = e^\alpha + 1$$

$$\text{Αφού : } \boxed{e^\alpha = \frac{1}{\alpha}} \Leftrightarrow \boxed{\alpha = -\ln \alpha} \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow \alpha} [g(x) - e^\alpha - 1] = 0$$

Στην θέση $x = \alpha$ η g έχει ελάχιστο άρα για τιμές του x κοντά στο α ισχύει

$$g(x) > g(\alpha) \Leftrightarrow g(x) - e^\alpha - 1 > 0$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{1}{g(x) - e^\alpha - 1} = +\infty$$

- Για το όριο του αριθμητή έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} [g(2\alpha + f(x)) - g(1 + f(\alpha))] = g(2\alpha + f(\alpha)) - g(1 + f(\alpha)) > 0$$

Διότι:

Ισχύει $2\alpha + f(\alpha) > 1 + f(\alpha)$, οι αριθμοί $2\alpha + f(\alpha), 2\alpha + 1$ είναι μεγαλύτερη του α , δηλαδή βρίσκονται σε διάστημα όπου η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα άρα

$$g(2\alpha + f(\alpha)) > g(1 + f(\alpha)) \Leftrightarrow g(2\alpha + f(\alpha)) - g(1 + f(\alpha)) > 0$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{g(2\alpha + f(x)) - g(1 + f(\alpha))}{g(x) - e^{\alpha} - 1} = +\infty$$

Δ4. (i) Έστω $\int_{\alpha}^{\beta} F(x) dx = \kappa, \kappa \in \mathbb{R}$ τότε ισχύει

$$e^x \geq \kappa x + 1 \Leftrightarrow e^x - \kappa x - 1 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Θεωρώ την συνάρτηση $\varphi(x) = e^x - \kappa x - 1, x \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\varphi(x) \geq \varphi(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή στο $x = 0$ έχει ελάχιστο, είναι παραγωγίσιμη σ αυτό άρα από θεώρημα Fermat $\varphi'(0) = 0$,

$$\text{Έχουμε } \varphi'(x) = e^x - \kappa \text{ και } \varphi'(0) = 0 \Leftrightarrow e^0 - \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = 1$$

$$\text{Άρα } \int_{\alpha}^{\beta} F(x) dx = 1$$

(ii) Για την συνάρτηση $h(x) = g(x^2) - f(x^2)$ αντικαθιστώντας έχουμε

$$h(x) = \alpha e^{x^2} - x^2$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(\alpha e^{x^2} - x^2) dx = \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha) \cdot h(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha) F'(x) dx$$

Εφαρμόζουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$[(x - \alpha) \cdot F(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} F(x) dx = (\beta - \alpha)F(\beta) - 1$$