ΤΑΞΗ: **3η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

Ημερομηνία: Τετάρτη 23 Απριλίου 2025
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου

Α2. Ορισμός σχολικού βιβλίου

Α3. Ορισμός σχολικού βιβλίου

Α4. α. Λάθος **β.** Λάθος **γ.** Σωστό **δ.** Σωστό **ε.** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f'(x) = 3x^2 - 4x + \alpha$

$\lambda = 8 \Leftrightarrow f'(-1) = 8 \Leftrightarrow 7 + \alpha = 8 \Leftrightarrow \alpha = 1$

Β2. Έστω y = λx + β η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο επαφής Α(-1, f(-1)). Από ερώτημα Β1 έχουμε λ = 8 και f(-1) = -5

Το σημείο Α(-1, -5) επαληθεύει την εξίσωση της εφαπτομένης

άρα $-5 = 8\cdot(-1) + \beta \Leftrightarrow \beta = 3$

επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι y = 8x + 3

Β3. Για α = 1 έχουμε $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1\ ,\ x \in R$

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = \frac{1}{3}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ ή $x < \dfrac{1}{3}$

x	$-\infty$ … $1/3$	$1/3$ … 1	1 … $+\infty$
f′(x)	+	-	+
f(x)	↗	↘	↗

T.M. (στο 1/3) T. E. (στο 1)

Η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $\left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right]$ $\kappa\alpha\iota$ $[1, +\infty)$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\dfrac{1}{3}, 1\right]$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_o = \frac{1}{3}$ $, \tau o\ f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{-23}{27}$

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_o = 1, \tau o\ f(1) = -1$

Β4. ι)

$$\lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(3x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{3x-1}{x+1} = 1$$

ιι) ισχύει ότι $f''(x) = 6x - 4$

$$\lim_{x\to 1} \frac{f''(x) - 2}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{6x - 6}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{6(x-1)}{x-1} = 6$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x) = 4x - 7$ $\quad g'(x) = 3x^2 - 8x + 5$

Γ2. $f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow 4x - 7 = 3x^2 - 8x + 5 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 12 = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Άρα $x_0 = 2$

Γ3.

$$\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1}\left[(3x-4)^{2025} + 2\frac{x^2-1}{x-1} + 11\right]$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[(3x-4)^{2025} + 2\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} + 11\right]$$

$$= \lim_{x\to 1}[(3x-4)^{2025} + 2(x+1) + 11] = 14$$

Γ4. Για κ = 14 και $x_o = 2$ ο πίνακας γίνεται

Απουσίες	**Μαθητές**	**Σχετική συχνότητα %**
x_i	**ν_i**	**f_i%**
4		**α**
5		**2α**
6		**40**
8		**2α**
Σύνολο	**25**	**100**

i) Επειδή γνωρίζουμε ότι $f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% = 100 \Leftrightarrow$

$5a + 40 = 100 \Leftrightarrow a = 12$

Ο πίνακας τότε χρησιμοποιώντας τους τύπους $f_i\% = f_i \cdot 100$ $\kappa\alpha\iota$ $f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$ γίνεται

Απουσίες	**Μαθητές**	**Σχετική συχνότητα %**
x_i	**ν_i**	**f_i%**
4	**3**	**12**
5	**6**	**24**
6	**10**	**40**
8	**6**	**24**
Σύνολο	**25**	**100**

ii) Για να βρούμε τη μέση τιμή θα κατασκευάσουμε τη στήλη $x_i\nu_i$

Απουσίες	**Μαθητές**	**Σχετική συχνότητα %**	
x_i	ν_i	$f_i\%$	$x_i\nu_i$
4	**3**	**12**	**12**
5	**6**	**24**	**30**
6	**10**	**40**	**60**
8	**6**	**24**	**48**
Σύνολο	**25**	**100**	**150**

$έχουμε\ τότε\ \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i \nu_i}{25} = \frac{150}{25} = 6\ απουσίες$

Επειδή το πλήθος ν = 25 περιττός αριθμός, τότε η διάμεσος ισούται με τη μεσαία παρατήρηση του δείγματος εφόσον αυτό είναι διατεταγμένο σε αύξουσα σειρά.

4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 8, 8, 8, 8, 8, 8

Άρα $\delta = t_{13} = 6$ απουσίες

Εναλλακτικά μπορούμε να κατασκευάσουμε τη στήλη N_i από την οποία μπορούμε να βρούμε σε ποια τιμή αντιστοιχεί η t_{13}

Απουσίες	**Μαθητές**	
x_i	ν_i	N_1
4	**3**	**3**
5	**6**	**9**
6	**10**	**19**
8	**6**	**25**
Σύνολο	**25**	**-**

iii) Για να υπολογίσουμε την τυπική απόκλιση s θα υπολογίσουμε πρώτα τη διακύμανση S^2. Κατασκευάζουμε τη στήλη $(x_i - \bar{x})^2 \nu_i$

Απουσίες	Μαθητές		
x_i	ν_i	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \nu_i$
4	3	4	12
5	6	1	6
6	10	0	0
8	6	4	24
Σύνολο	25		42

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{4}(x_i - \bar{x})^2 \nu_i}{\nu} = \frac{42}{25} = 1{,}68$$

Τότε $s = \sqrt{S^2} = \sqrt{1.68} = 1{,}3\ απουσίες$

Επειδή $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{1{,}3}{6} = 0{,}216$ ή $21{,}6\%$ και CV > 10% τότε το δείγμα δεν είναι ομοιογενές

iv) Το ποσοστό των μαθητών είναι $f_1\% + f_2\% + f_3\% = 76\%$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Το εμβαδό του ορθογωνίου τριγώνου δίνεται από τον τύπο $E_1 = \frac{1}{2}\beta \cdot \upsilon$

Άρα $E_1 = \frac{1}{2}(K\Lambda)(KM) = \frac{1}{2}2x(x+1) = x^2 + x$

Το εμβαδό του τετραγώνου δίνεται από τον τύπο $E_2 = \alpha^2$

Άρα $E_2 = (AB)^2 = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

Άρα το άθροισμα των εμβαδών είναι $E(x) = x^2 + x + x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + 3x + 1$

Επειδή έχουμε διαστάσεις πλευρών σχημάτων για να ορίζονται πρέπει να είναι θετικές, άρα πρέπει $x > 0$

Δ2. Υπολογίζω την Ε΄(x) = 4x +3

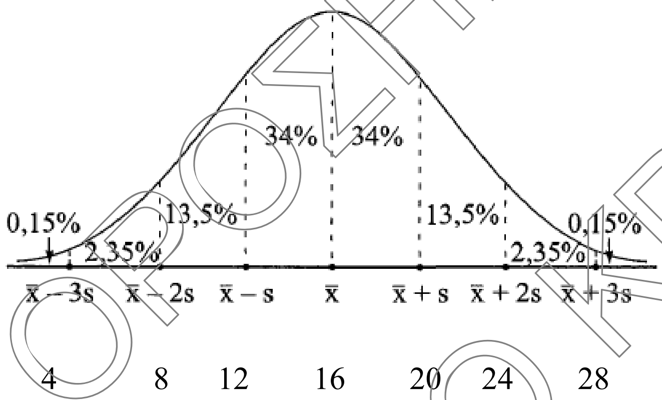
$$E'(x) = 7 \Leftrightarrow 4x + 3 = 7 \Leftrightarrow x = 1$$

Δ3. α) Θα υπολογίσω τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση

$$\bar{x} = E'(3) + 1 = 15 + 1 = 16$$

Υπολογίζω την Ε΄΄(x) = 4 άρα s = Ε΄΄(2) = 4

Δ3. β)



Το 13,5% + 2,35% + 0,15% = 16% των μαθητών χρειάζεται περισσότερο από 20 λεπτά για να πάνε στο σχολείο. Έστω ν το μέγεθος του δείγματος, δηλαδή το πλήθος των μαθητών, τότε

$$\frac{40}{\nu} = \frac{16}{100} \Leftrightarrow \nu = \frac{40 \cdot 100}{16} \Leftrightarrow \nu = 250$$

Δ3. γ) Το 64% των μαθητών χρειάζεται από 12 έως 20 λεπτά για να πάει στο σχολείο.

Οπότε

$$\frac{x}{250} = \frac{64}{100} \Leftrightarrow x = \frac{64}{100} \cdot 250 \Leftrightarrow x = 160 \; \mu\alpha\theta\eta\tau\acute{\epsilon}\varsigma$$