

ΤΑΞΗ: Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Τετάρτη 23 Απριλίου 2025  
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

### ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

#### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου με κέντρο  $K(x_0, y_0)$  και ακτίνα  $\rho$  είναι  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ .

Μονάδες 7

**A2. α)** Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ ;

Μονάδες 4

β) Τι ονομάζουμε εκκεντρότητα της έλλειψης με εξίσωση  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ;

Μονάδες 4

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Κάθε ευθεία που διέρχεται από το σημείο  $(x_0, y_0)$  έχει εξίσωση της μορφής  $y - y_0 = \lambda \cdot (x - x_0)$

β) Η διευθετούσα της παραβολής με εξίσωση  $y^2 = 2px$  είναι ευθεία παράλληλη στον  $y'y$  άξονα.

γ) Η ευθεία με εξίσωση  $Ax + By + \Gamma = 0$  είναι κάθετη στο διάνυσμα  $\vec{\delta} = (B, -A)$ .

δ) Η παράσταση  $((\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}) \cdot \vec{\delta}$  παριστάνει διάνυσμα.

ε) Η απόσταση των σημείων  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$  είναι ίση με

$$(AB) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Μονάδες 10

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a} = (\lambda, -3)$ ,  $\vec{\beta} = (1, \lambda^2 + 1)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  για τα οποία ισχύει

$$2 \cdot \vec{a} - \vec{\beta} = (3, -11).$$

**B1.** Να αποδείξετε ότι  $\lambda = 2$ .

**Μονάδες 6**

Για  $\lambda = 2$

**B2.** Να αποδείξετε ότι για την γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα  $\vec{a}$ ,  $\vec{\beta}$  ισχύει  $\text{syn}(\widehat{\vec{a}, \vec{\beta}}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Μονάδες 7**

**B3.** Αν  $O$  η αρχή σ' ένα σύστημα αξόνων  $xOy$  και για τα σημεία του επιπέδου  $A$  και  $B$  ισχύουν  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{\beta}$  να βρείτε:

α) τις εξισώσεις της διαμέσου  $OD$  και του ύψους  $OM$  του τριγώνου  $OAB$ .

**Μονάδες 6**

β) τις συντεταγμένες του σημείου  $M$ .

**Μονάδες 6****ΘΕΜΑ Γ**

Σε σύστημα αξόνων  $xOy$  δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1: 2x + y = 4$  και η  $\varepsilon_2$  που σχηματίζει γωνία  $\hat{\omega} = \frac{\pi}{4}$  με τον άξονα  $x'x$  και διέρχεται από το σημείο  $A(0,1)$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $\varepsilon_2$  έχει εξίσωση  $y = x + 1$  και ότι οι  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  τέμνονται στο σημείο  $K(1,2)$ .

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να βρείτε τα σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$  της ευθείας  $\varepsilon_2$  τα οποία απέχουν από την  $\varepsilon_1$  απόσταση ίση με  $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ .

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής με κορυφή το σημείο  $O$ , άξονα συμμετρίας τον  $x'x$ , η οποία διέρχεται από το  $K$  και έπειτα να δείξετε ότι η εφαπτομένη της στο  $K$  είναι η ευθεία  $\varepsilon_2$ .

**Μονάδες 6**

Γ4. α) Να βρείτε την εξίσωση ευθείας ( $\zeta$ ) η οποία διέρχεται από το σημείο τομής της διευθετούσας της παραβολής και της ευθείας  $\varepsilon_1$  και είναι παράλληλη στην  $\varepsilon_2$ .

**Μονάδες 2**

β) Για οποιοδήποτε σημείο  $\Lambda$  της ευθείας ( $\zeta$ ) να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου  $\Lambda\Gamma\Delta$  είναι ίσο με 12 τμ.

**Μονάδες 5**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι κύκλοι  $C_1: x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$  και

$C_2: (x - \lambda)^2 + (y - \lambda - 2)^2 = 2$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , με κέντρα  $K$  και  $\Lambda$  αντίστοιχα, οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά.

Δ1. Να αποδείξετε ότι  $\lambda = 1$ .

**Μονάδες 5**

Για  $\lambda = 1$ .

Δ2.α) Να βρείτε τα σημεία τομής του κύκλου  $C_1$  με τον  $x'x$  και τα σημεία τομής του κύκλου  $C_2$  με τον  $y'y$ .

**Μονάδες 2**

β) Αν  $A$  και  $B$  είναι τα σημεία τομής του κύκλου  $C_1$  με τον  $x'x$  και του κύκλου  $C_2$  με τον  $y'y$  αντίστοιχα τα οποία απέχουν την μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων, να δείξετε ότι η ευθεία  $AB$  είναι κοινή εξωτερική εφαπτομένη των δύο κύκλων.

**Μονάδες 4**

Δ3. α) Να αποδείξετε ότι η κοινή τους εφαπτομένη, ευθεία ( $\varepsilon$ ), που διέρχεται από το σημείο επαφής τους, είναι η διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{xOy}$ .

**Μονάδες 6**

β) Να βρείτε τα σημεία  $M$  και  $M'$  της ευθείας ( $\varepsilon$ ) που με τα κέντρα των κύκλων  $C_1$  και  $C_2$  σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο.

**Μονάδες 4**

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $MKM'\Lambda$  είναι ρόμβος.

**Μονάδες 4**