



ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Σάββατο 26 Απριλίου 2025
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι για $0 < a \neq 1$ και για οποιουσδήποτε $\theta_1, \theta_2 > 0$ ισχύει:

$$\log_a(\theta_1\theta_2) = \log_a\theta_1 + \log_a\theta_2$$

Μονάδες 10

Α2. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A λέγεται περιττή;

Μονάδες 5

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα σε αυτό το γράμμα Σ, αν η πρόταση είναι σωστή ή το γράμμα Λ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:

- Η συνάρτηση $\varphi(x) = e^{\varphi x}$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τον άξονα yy' .
- Για κάθε $a > 1$ και $x > 1$ ισχύει ότι $\log_a x > 0$.
- Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.
- Η συνάρτηση $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται για κάθε $a \in \mathbb{R}$.
- Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$, $x \in \mathbb{R}$ με $a > 0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .

Μονάδες 2x5

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

B1. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το $x + 1$ είναι -6 , να βρείτε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 8

B2. Αν $\alpha = -5$ και $\beta = 1$, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

Μονάδες 8

B3. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης P βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 9**ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. Να βρείτε τη γωνία $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ για την οποία ισχύει

$$\frac{\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right) \cdot \varepsilon\varphi(-\varphi)}{\sigma\upsilon\nu(\pi - \varphi) \cdot \sigma\varphi(\pi + \varphi)} = -1$$

Μονάδες 6

Γ2. α) Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει

$$2(\ln(\eta\mu\omega) + \ln(\sigma\upsilon\nu\omega)) = \ln(\eta\mu^2\omega - \eta\mu^4\omega)$$

Μονάδες 6

β) Να λύσετε στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ την εξίσωση

$$2(\ln(\eta\mu x) + \ln(\sigma\upsilon\nu x)) = \ln 3 - 4 \ln 2 \quad (1)$$

Μονάδες 8

Γ3. Αν $\varphi = \frac{\pi}{4}$ και η εξίσωση (1) έχει λύσεις $x_1 = \frac{\pi}{6}$ και $x_2 = \frac{\pi}{3}$,

να λύσετε το σύστημα Σ :
$$\begin{cases} (\eta\mu x_1) \cdot x - (\sigma\upsilon\nu\varphi) \cdot y = 1 \\ (\epsilon\varphi x_2) \cdot x - (\sigma\varphi x_2) \cdot y = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 6$, $x \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x=2$ την τιμή $f(2)=2$.

Μονάδες 3

β. Αν η συνάρτηση $g(x) = 4^x - 4 \cdot 2^x + 6$, $x \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο να βρείτε τη θέση και την τιμή του.

Μονάδες 5

Αν η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x=1$ την τιμή $g(1)=2$, τότε:

Δ2. α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x) = \log(8^{x-1} - 1) + 3\log 2$ και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\varphi(x) = \log(g(x) - 2)$.

Μονάδες 4

β. Να εξετάσετε αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων h και φ έχουν κοινό σημείο.

Μονάδες 5

Δ3. α. Να βρείτε τις τιμές του $c \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης $q(x) = 2\eta\mu(\pi(x+c))$, $x \in \mathbb{R}$ έχει κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g .

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων q και g έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο.

Μονάδες 3

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ