ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Τετάρτη 23 Απριλίου 2025
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη εξίσωσης κύκλου, σχολικό βιβλίο σελίδα 83

Α2. α) Ορισμός εσωτερικού γινομένου, σχολικό βιβλίο σελίδα 41

β) Ορισμός εκκεντρότητας έλλειψης, σχολικό βιβλίο σελίδα 104

Α3. α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Λάθος

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε $2\cdot\vec{\alpha}-\vec{\beta}=(3,-11)\Leftrightarrow 2\cdot(\lambda,-3)-(1,\lambda^2+1)=(3,-11)$

$$\Leftrightarrow (2\lambda-1,-7-\lambda^2)=(3,-11)\Leftrightarrow$$

$2\lambda-1=3 \;\kappa\alpha\iota\; -7-\lambda^2=-11 \Leftrightarrow \lambda=2 \;\kappa\alpha\iota\; \lambda=\pm2$. Άρα $\lambda=2$.

Β2. Για $\lambda=2$ τα διανύσματα γίνονται $\vec{\alpha}=(2,-3)$ και $\vec{\beta}=(1,5)$.

Γνωρίζουμε ότι $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}$ (1),

όπου $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=2\cdot1+(-3)\cdot5=-13$ και $|\vec{\alpha}|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$, $|\vec{\beta}|=\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$, άρα η (1) γίνεται

$$\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\frac{-13}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{26}}=\frac{-13}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{13}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}.$$

Β3. Αφού $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha},\ \overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$ θα είναι $A(2,-3)\ και\ B(1,5)$.

α) Για το μέσο Δ του AB θα είναι $x_\Delta = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}\ , y_\Delta = \frac{-3+5}{2} = 1$,

δηλαδή $\Delta(\frac{3}{2}, 1)$. Αφού η $O\Delta$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων O θα είναι της μορφής $y = \lambda \cdot x$, όπου $\lambda = \frac{y_\Delta - y_O}{x_\Delta - x_O} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$ άρα $(O\Delta)$: $\boxed{y = \frac{2}{3} \cdot x}$

Υπολογίζουμε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας (AB),

$\lambda_{AB} = \frac{5-(-3)}{1-2} = -8$ οπότε η κάθετη στην (AB) θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{1}{8}$ και η εξίσωσης της (OM): $\boxed{y = \frac{1}{8} \cdot x}$

β) Η εξίσωση της ευθείας (AB) θα είναι $y - y_A = \lambda_{AB} \cdot (x - x_A) \Leftrightarrow$

$y - (-3) = -8 \cdot (x-2) \Leftrightarrow y = -8x + 13$.

Για το σημείο τομής M του ύψους (OM) και της ευθείας (AB) θα ισχύει:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{8} \cdot x \\ y = -8x + 13 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{8} \cdot x = -8 \cdot x + 16 \Leftrightarrow 65 \cdot x = 104 \Leftrightarrow x = \frac{104}{65}$$

ή $x = \frac{8}{5}$ και $y = \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{5} = \frac{1}{5}$ άρα $M(\frac{8}{5}, \frac{1}{5})$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε_2) θα είναι $\lambda = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} = 1$ και αφού διέρχεται από το Α(0,1) έχουμε $y - 1 = 1(x - 0) \Leftrightarrow y = x + 1$.

Για το σημείο τομής των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ θα ισχύει:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ y = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow 2x + x + 1 = 4 \Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x = 1$$

και $y = 2$ δηλαδή Κ(1,2)

Γ2. Έστω $\Gamma(x_0, y_0)$ ζητούμενο σημείο. Αφού είναι σημείο της ε_2 θα ισχύει $y_0 = x_0 + 1$.

Θέλουμε $d(\Gamma, \varepsilon_1) = \frac{6\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \frac{|2x_0 + y_0 - 4|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{6\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow$

$$|2x_0 + y_0 - 4| = 6 \Leftrightarrow$$

$$2x_0 + y_0 - 4 = 6 \text{ ή } 2x_0 + y_0 - 4 = -6 \Leftrightarrow$$

$$2x_0 + x_0 + 1 - 4 = 6 \text{ ή } 2x_0 + x_0 + 1 - 4 = -6 \Leftrightarrow$$

$$x_0 = 3 \text{ ή } x_0 = -1$$

Οπότε $y_0 = 4$ ή $y_0 = 0$ αντίστοιχα. Άρα Γ(-1,0) και Δ(3,4).

Γ3. Έστω $y^2 = 2px$ η ζητούμενη εξίσωση παραβολής. Αφού διέρχεται από το Κ(1,2) θα ισχύει $2^2 = 2p1 \Leftrightarrow p = 2$. Άρα, $y^2 = 4x$.

Η εξίσωση εφαπτομένης της παραβολής στο Κ(1,2) θα είναι

$y \cdot 2 = 2 \cdot (x+1) \Leftrightarrow y = x + 1$ δηλ. η ευθεία ε_2.

Γ4. α) Η εξίσωση της διευθετούσας της παραβολής $y^2 = 4x$ είναι $x = -1$ και το σημείο τομής της διευθετούσας και της (ε_1) είναι

$\begin{cases} x = -1 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 6 \end{cases}$ δηλ. (-1,6)

οπότε (ζ): $y - 6 = 1 \cdot (x+1) \Leftrightarrow y = x + 7$.

β) Αν Λ σημείο της ευθείας (ζ) με τετμημένη x_0 θα είναι $\Lambda(x_0, x_0 + 7)$. Ακόμη, Γ(-1,0), Δ(3,4).

Έτσι, $\overrightarrow{\Lambda\Gamma} = (-1 - x_o, 0 - x_o - 7) = (-1 - x_0, -x_0 - 7)$ και

$\overrightarrow{\Lambda\Delta} = (3 - x_0, 4 - x_0 - 7) = (3 - x_0, -3 - x_0)$

$E_{\Lambda\Gamma\Delta} = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{\Lambda\Gamma}, \overrightarrow{\Lambda\Delta})\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -1-x_0 & -x_0-7 \\ 3-x_0 & -3-x_0 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -1-x_0 & -x_0-7 \\ 3-x_0 & -3-x_0 \end{vmatrix}\right| =$

$= \frac{1}{2}\left|(-1-x_0)(-3-x_0) - (-x_0-7)(3-x_0)\right| =$

$\frac{1}{2}\left|(1+x_0)(3+x_0) + (x_0+7)(3-x_0)\right| =$

$\frac{1}{2}\left|3 + x_0 + 3x_0 + x_0^2 + 3x_0 + 21 - 7x_0 - x_0^2\right| = \frac{1}{2}|24| = 12 \text{ τ.μ.}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για τον κύκλο C_1 βρίσκουμε κέντρο και ακτίνα:

$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $\rho_1 = \frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$

όπου $A = -6, B = -2 \; και \; \Gamma = 8$.

Άρα $K(3,1) \; και \; \rho_1 = \frac{\sqrt{36+4-32}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$.

Για τον κύκλο C_2 έχουμε $\Lambda(\lambda, \lambda+2) \; και \; \rho_2 = \sqrt{2}$.

Αφού οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά θα ισχύει $(K\Lambda) = \rho_1 + \rho_2 \Leftrightarrow$

$\sqrt{(\lambda-3)^2 + (\lambda+2-1)^2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow (\lambda-3)^2 + (\lambda+1)^2 = 4 \cdot 2$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 9 + \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 8 \Leftrightarrow 2\lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow$

$(\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$, οπότε C_2: $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 2$ με κέντρο

$\Lambda(1,3)$ και ακτίνα $\rho_2 = \sqrt{2}$.

Δ2. α) Για τα σημεία τομής του C_1 με τον x΄x άξονα :

Θέτουμε $y = 0$ οπότε $(x-3)^2 + (0-1)^2 = 2 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$x - 3 = 1$ ή $x - 3 = -1 \Leftrightarrow x = 4$ ή $x = 2$. Άρα $A_1(4,0)$, $A_2(2,0)$.

Για τα σημεία τομής του C_2 με τον y΄y άξονα :

Θέτουμε $x = 0$: $(0-1)^2 + (y-3)^2 = 2 \Leftrightarrow (y-3)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$y - 3 = 1$ ή $y - 3 = -1 \Leftrightarrow y = 4$ ή $y = 2$, δηλαδή $B_1(0,4), B_2(0,2)$.

β) Είναι $A(2,0)$ *και* $B(0,2)$. Για την ευθεία AB έχουμε

$\lambda = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-0}{0-2} = -1$ και αφού διέρχεται από το σημείο $A(2,0)$ θα είναι

$y - 0 = -1(x-2) \Leftrightarrow y = -x + 2$ ή (AB): $x + y - 2 = 0$.

Η απόσταση $d_1(K, AB) = \frac{|3+1-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ και

η απόσταση $d_2(\Lambda, AB) = \frac{|1+3-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Αφού $d_1 = d_2 = \rho_1 = \rho_2 = \sqrt{2}$ η ευθεία (AB) είναι κοινή εφαπτομένη των 2 κύκλων.

Δ3. Για το σημείο επαφής των δύο κύκλων θα ισχύει

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-3)^2 = 2 \\ (x-3)^2 + (y-1)^2 = 2 \end{cases}$$

Άρα, $(x-1)^2 + (y-3)^2 = (x-3)^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y - 9 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 \Leftrightarrow$

$4x = 4y \Leftrightarrow y = x$ οπότε

$(x-1)^2 + (x-3)^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + x^2 - 6x + 9 = 2 \Leftrightarrow$

$2x^2 - 8x + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

οπότε και $y = 2$, άρα κοινό σημείο των C_1, C_2 το $N(2,2)$.

Η ζητούμενη εφαπτομένη ευθεία (ε) θα είναι κάθετη στις KN και ΛN επομένως κάθετη στην διάκεντρο $K\Lambda$ η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης

$\lambda_{K\Lambda} = \frac{y_\Lambda - y_K}{x_\Lambda - x_K} = \frac{3-1}{1-3} = -1$

άρα $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{K\Lambda} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = 1$. Έτσι (ε): $y - 2 = 1 \cdot (x-2) \Leftrightarrow y = x$

που είναι η διχοτόμος της γωνίας $x\widehat{O}y$.

β) Έστω $M(x,y)$ σημείο της ευθείας (ε): $y = x$, άρα $M(x,x)$.

Το $KM\Lambda$ τρίγωνο είναι ισόπλευρο $\Leftrightarrow (KM) = (K\Lambda) = (M\Lambda)$

όπου $(KM) = \sqrt{(x-3)^2 + (x-1)^2}$,

$(K\Lambda) = \sqrt{(3-1)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{2}$, $(M\Lambda) = \sqrt{(x-1)^2 + (x-3)^2}$,

άρα $\sqrt{(x-3)^2 + (x-1)^2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow$

$$x^2 - 6x + 9 + x^2 - 2x + 1 = 8 \Leftrightarrow$$

$$2x^2 - 8x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Delta = 12,\ x_{1,2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \begin{cases} 2+\sqrt{3} \\ 2-\sqrt{3} \end{cases} \text{ οπότε}$$

$$M(2+\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}) \text{ και } M'(2-\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}).$$

γ) Θα αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο $MKM'\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο. Έχουμε

$$\lambda_{KM} = \frac{2+\sqrt{3}-1}{2+\sqrt{3}-3} = \frac{1+\sqrt{3}}{-1+\sqrt{3}},\ (KM) = 2\sqrt{2} \text{ και}$$

$$\lambda_{M'\Lambda} = \frac{3-2+\sqrt{3}}{1-2+\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{-1+\sqrt{3}},\ (M'\Lambda) = 2\sqrt{2}$$

άρα αφού έχει 2 απέναντι πλευρές παράλληλες και ίσες είναι παραλληλόγραμμο.

Επίσης οι διαγώνιοι του $MKM'\Lambda$ τέμνονται κάθετα, άρα το $MKM'\Lambda$ είναι ρόμβος.

Σχόλιο: *Σε κάποια ερωτήματα σε όλα τα θέματα υπάρχουν περισσότεροι από έναν τρόποι λύσης. Κάθε τρόπος επιστημονικά σωστός είναι αποδεκτός.*