

**ΤΑΞΗ:** Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

**ΜΑΘΗΜΑ:** ΑΛΓΕΒΡΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

**Ημερομηνία:** Σάββατο 26 Απριλίου 2025

**Διάρκεια Εξέτασης:** 2 ώρες

### ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

#### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 175.

**A2.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 36.

**A3.**  $\alpha \Lambda$ ,  $\beta \Sigma$ ,  $\gamma \Sigma$ ,  $\delta \Lambda$ ,  $\varepsilon \Lambda$ .

#### ΘΕΜΑ Β

**B1.**  $x - 2$  παράγοντας  $\Leftrightarrow$  το 2 είναι ρίζα  $\Leftrightarrow P(2) = 0 \Leftrightarrow$

$$16 + 4\alpha + 2\beta + 2 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = -9 \quad (1)$$

$$P(-1) = -6 \Leftrightarrow -2 + \alpha - \beta + 2 = -6 \Leftrightarrow \alpha - \beta = -6 \quad (2)$$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = -9 & (1) \\ \alpha - \beta = -6 & (2) \end{cases} \text{, προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε:}$$

$$3\alpha = -15 \Leftrightarrow \alpha = -5 \text{ και αντικαθιστώντας στην (1) όπου } \alpha = -5 \text{ προκύπτει } \beta = 1$$

**B2.** Κάνοντας σχήμα Horner στη θέση 2 έχουμε

$$(x - 2)(2x^2 - x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -\frac{1}{2}$$

**B3.**  $P(x) < 0 \Leftrightarrow (x - 2)(2x^2 - x - 1) < 0$  Από τον πίνακα προσήμων έχουμε ότι η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης βρίσκεται κάτω από τον άξονα  $x'x$

$$\text{για } x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, 2)$$

#### ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Για  $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  έχουμε:

$$\frac{\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right) \cdot \varepsilon\varphi(-\varphi)}{\sigma\upsilon\nu(\pi - \varphi) \cdot \sigma\varphi(\pi + \varphi)} = -1 \Leftrightarrow \frac{-\sigma\upsilon\nu\varphi \cdot (-\varepsilon\varphi\varphi)}{-\sigma\upsilon\nu\varphi \cdot \sigma\varphi\varphi} = -1 \Leftrightarrow -\varepsilon\varphi^2\varphi = -1 \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi^2\varphi = 1 \underset{\varepsilon\varphi\varphi > 0}{\Leftrightarrow} \varepsilon\varphi\varphi = 1 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

**Γ2. α)** Για  $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  είναι  $\eta\mu\omega, \sigma\upsilon\nu\omega \in (0,1)$ , και

$$2(\ln(\eta\mu\omega) + \ln(\sigma\upsilon\nu\omega)) = 2\ln(\eta\mu\omega) + 2\ln(\sigma\upsilon\nu\omega) = \ln(\eta\mu^2\omega) + \ln(\sigma\upsilon\nu^2\omega) = \ln(\eta\mu^2\omega \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega) = \ln(\eta\mu^2\omega \cdot (1 - \eta\mu^2\omega)) = \ln(\eta\mu^2\omega - \eta\mu^4\omega)$$

**β)**  $2(\ln(\eta\mu x) + \ln(\sigma\upsilon\nu x)) = \ln 3 - 4\ln 2$ , αφού ζητάμε λύσεις  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

η εξίσωση, λόγω του προηγούμενου ερωτήματος, ισοδυναμεί με την  $\ln(\eta\mu^2x - \eta\mu^4x) = \ln 3 - \ln 2^4 = \ln \frac{3}{16} \Leftrightarrow$  (από το 1-1 της λογαριθμικής)

$$\eta\mu^2x - \eta\mu^4x = \frac{3}{16} \Leftrightarrow 16\eta\mu^4x - 16\eta\mu^2x + 3 = 0.$$

Θέτουμε  $\eta\mu^2x = \rho$ , οπότε για  $\rho \in (0,1)$  έχουμε  $16\rho^2 - 16\rho + 3 = 0$  με λύσεις

$$\rho = \frac{1}{4}, \rho = \frac{3}{4} \text{ οπότε } \eta\mu^2x = \frac{1}{4}, \eta\mu^2x = \frac{3}{4} \text{ και αφού } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ είναι}$$

$$\eta\mu x = \frac{1}{2}, \eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ άρα } x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{3}$$

**Γ3.** Αντικαθιστώντας τους γνωστούς τριγωνομετρικούς αριθμούς το σύστημα γίνεται:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y = 1 \quad (\cdot 2) \\ \sqrt{3} \cdot x - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot y = 2\sqrt{3} \quad (\cdot 3) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - \sqrt{2}y = 2 \\ 3\sqrt{3}x - \sqrt{3}y = 6\sqrt{3} \end{array} \right\} \cdot (-3\sqrt{3}) \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -3\sqrt{3}x + 3\sqrt{6}y = -6\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3}x - \sqrt{3}y = 6\sqrt{3} \end{array} \right\} \text{ και με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε } (3\sqrt{6} - \sqrt{3})y = 0$$

επομένως  $y=0$ . (Για τους σκοπούς αυτού του διαγωνίσματος προτείνουμε να θεωρηθεί προφανές ότι  $3\sqrt{6} - \sqrt{3} \neq 0$ . Αν ωστόσο το θεωρείτε σκόπιμο τότε:  $3\sqrt{6} - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow$

$$3\sqrt{6} = \sqrt{3} \Leftrightarrow (\text{για θετικά μέλη}) (3\sqrt{6})^2 = \sqrt{3}^2 \Leftrightarrow 9 \cdot 6 = 3 \Leftrightarrow 54 = 3 \text{ Ψευδής,}$$

επομένως  $3\sqrt{6} - \sqrt{3} \neq 0$ ).

Για  $y=0$  η πρώτη εξίσωση δίνει  $\frac{1}{2}x = 1$  ή  $x = 2$

Συνεπώς το σύστημα έχει μοναδική λύση  $(x, y) = (2, 0)$

### ΘΕΜΑ Δ

**Δ1. α)** Θα δείξουμε ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι  $f(x) \geq f(2) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 6 \geq 2 \Leftrightarrow$

$$x^2 - 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ με το ίσον να ισχύει}$$

μόνο για  $x=2$ . Επομένως η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο μόνο στη θέση  $x=2$  την τιμή  $f(2)=2$ .

**β)** Αρχικά έχουμε

$$g(x) = 4^x - 4 \cdot 2^x + 6 = (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 6, x \in \mathbb{R}. \text{ Θέτουμε } 2^x = \omega, \omega > 0$$

Έτσι ο τύπος του δεύτερου μέλους γίνεται  $\omega^2 - 4\omega + 6$  για τον οποίο γνωρίζουμε από το προηγούμενο ερώτημα ότι παρουσιάζει, στους πραγματικούς αριθμούς άρα και στο διάστημα  $(0, +\infty)$ , ολικό ελάχιστο μόνο στη θέση  $\omega=2$  την τιμή 2.

$\omega=2 \Leftrightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$ . Άρα η συνάρτηση  $g$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο μόνο στη θέση  $x=1$  την τιμή  $g(1)=2$

Σχόλιο: Εν όψη  $\Gamma'$  λυκείου προτείνουμε και τον ακόλουθο τρόπο παρουσίασης της λύσης:

Έχουμε  $g(x) = 4^x - 4 \cdot 2^x + 6 = (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 6 = f(2^x)$ . Από το προηγούμενο ερώτημα γνωρίζουμε ότι η  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο μόνο στη θέση που η ανεξάρτητη μεταβλητή της είναι 2 δηλαδή  $2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$ . Τότε η ελάχιστη τιμή της είναι η  $g(1) = f(2^1) = f(2) = 2$

**Δ2. α)** Για το πεδίο ορισμού της  $h$  απαιτούμε  $8^{x-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow 8^{x-1} > 1 \Leftrightarrow 8^{x-1} > 8^0$ .

Είναι  $8 > 1$  οπότε η εκθετική είναι γνησίως αύξουσα άρα  $x-1 > 0$  ή  $x > 1$

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της  $h$  είναι το διάστημα  $(1, +\infty)$

Για το πεδίο ορισμού της  $\varphi$  απαιτούμε  $g(x) - 2 > 0 \Leftrightarrow g(x) > 2$ .

Από την προηγούμενη μελέτη γνωρίζουμε ότι  $g(x) \geq 2$  με το ίσον να ισχύει μόνο για  $x=1$ . Για κάθε άλλο  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει η  $g(x) > 2$ . Επομένως το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $\varphi$  είναι  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ .

**β)** Η τομή των πεδίων ορισμού των δύο συναρτήσεων είναι το διάστημα  $\Delta = (1, +\infty)$

Θα εξετάσουμε αν η εξίσωση  $h(x) = \varphi(x)$ , έχει λύση στο  $\Delta$ .

$$h(x) = \varphi(x) \Leftrightarrow \log(8^{x-1} - 1) + 3 \log 2 = \log(g(x) - 2) \Leftrightarrow$$

$$\log(8^{x-1} - 1) + \log 2^3 = \log(g(x) - 2) \Leftrightarrow \log[(8^{x-1} - 1) \cdot 8] = \log(g(x) - 2)^{1-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8^x - 8 = g(x) - 2 \Leftrightarrow (2^x)^3 - 8 = (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 6 - 2 \Leftrightarrow (2^x)^3 - (2^x)^2 + 4 \cdot 2^x - 12 = 0$$

Θέτουμε  $\omega = 2^x$ ,  $\omega > 0$ , οπότε προκύπτει η πολυωνυμική εξίσωση

$\omega^3 - \omega^2 + 4\omega - 12 = 0$ . Με τη βοήθεια του σχήματος Horner στη θέση  $\omega=2$  διαπιστώνουμε ότι η τελευταία εξίσωση είναι ισοδύναμη με την  $(\omega - 2)(\omega^2 + \omega + 6) = 0$  από την οποία

προκύπτει η μοναδική λύση  $\omega=2$ , δεκτή ως θετική. Τότε είναι  $\omega=2 \Leftrightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$ . Όμως η τιμή  $x=1$  δεν ανήκει στο  $\Delta$  επομένως η εξίσωση  $h(x) = \varphi(x)$  είναι τελικά αδύνατη και κατά συνέπεια οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων δεν έχουν κοινό σημείο.

**Δ3. α)** Η μέγιστη τιμή που θα μπορούσε να πάρει η συνάρτηση

$q(x) = 2\eta\mu(\pi(x+c))$ ,  $x \in \mathbb{R}$  είναι το 2 η οποία είναι η ελάχιστη που μπορεί να πάρει η συνάρτηση  $g$ . Δηλαδή για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $q(x) \leq 2 \leq g(x)$  (1).

Για να έχουν κοινό σημείο οι δύο γραφικές παραστάσεις πρέπει να έχει λύση η εξίσωση  $q(x) = g(x)$ , δηλαδή πρέπει να υπάρχει τιμή του  $x$  για την οποία να ισχύουν ταυτόχρονα οι ισότητες στην (1). Το δεύτερο ίσον στην (1) ισχύει μόνο για  $x=1$  όπως έχουμε δείξει, άρα απαιτούμε να ισχύει και η  $q(1)=2$ .

$$q(1)=2 \Leftrightarrow 2\eta\mu(\pi(1+c))=2 \Leftrightarrow \eta\mu(\pi(1+c))=1 \Leftrightarrow \pi(1+c) = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow c+1 = 2\kappa + \frac{1}{2}$$

$$c = 2\kappa - \frac{1}{2}, \text{ για } \kappa \in \mathbb{Z}$$

**β)** Για κάθε  $x \neq 1$  είναι  $g(x) > 2 \geq q(x)$  άρα  $g(x) > q(x)$  οπότε και  $g(x) \neq q(x)$ .

Επομένως το μόνο σημείο που μπορεί να είναι κοινό είναι το (1,2) και αυτό συμβαίνει μόνο αν  $c = 2\kappa - \frac{1}{2}$ , για  $\kappa \in \mathbb{Z}$ . Για οποιαδήποτε άλλη τιμή του  $c$ , ούτε αυτό το σημείο

είναι κοινό. Συνεπώς οι δύο γραφικές παραστάσεις έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο.

Έχει ενδιαφέρον η Γεωμετρική ερμηνεία του Δ3.

Στο πρώτο από τα παρακάτω διαγράμματα βλέπουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $g$  και  $q$  για  $c \neq 2\kappa - \frac{1}{2}$ , για  $\kappa \in \mathbb{Z}$ , ενώ στο δεύτερο βλέπουμε τις

γραφικές τους παραστάσεις για  $c = 2\kappa - \frac{1}{2}$ , για  $\kappa \in \mathbb{Z}$ . Οι τιμές αυτές του  $c$  προκαλούν

οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $q$  τέτοια, ώστε κάποιο από τα σημεία της με τεταγμένη 2 να συμπίπτει με το σημείο (1,2) το οποίο είναι το μοναδικό σημείο που μπορεί να είναι κοινό.

