ΤΑΞΗ: **Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΑΛΓΕΒΡΑ**

Ημερομηνία: Σάββατο 26 Απριλίου 2025
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 63 σχολικού βιβλίου .

Α2. **α.** $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

β. $\Delta > 0$ και $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

γ. $\Delta = 0$ και $x_1 = x_2 = \dfrac{-\beta}{2\alpha}$

δ. $\Delta < 0$

ε. $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ και $P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha}$

Α3 **α.** Λάθος

β. Λάθος

γ. Σωστό

δ. Σωστό

ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε: $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 4$, $\omega = \alpha_2 - \alpha_1 = 3 - 2 = 1$

Από τον τύπο του $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\cdot\omega$ βάζοντας όπου $\nu = 10$ έχουμε:

$\alpha_{10} = 2 + (10 - 1)\cdot 1 = 2 + 9 = 11$

Από τον τύπο του $S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu)$ βάζοντας όπου $\nu = 10$ έχουμε:

$$S_{10} = \frac{10}{2}(\alpha_1 + \alpha_{10}) = 5(2+11) = 5\cdot 13 = 65$$

ή από τον τύπο $S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega\right]$ βάζοντας όπου $\nu = 10$ έχουμε:

$$S_{10} = \frac{10}{2}\left[2\alpha_1 + (10-1)\omega\right] = 5\cdot\left[2\cdot 2 + 9\cdot 1\right] = 5\cdot\left[4+9\right] = 5\cdot 13 = 65$$

Β2. $-x^2 + \frac{S_{10}}{13}x - (\alpha_{10} - 7) \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 + \frac{65}{13}x - (11-7) \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 + 5x - 4 \geq 0$

$\Delta = 5^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-4) = 25 - 16 = 9$

$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2(-1)} = \frac{-5 \pm 3}{-2} \Leftrightarrow$

$x_1 = \frac{-5+3}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$ ή $x_2 = \frac{-5-3}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$

x	$-\infty$	1		4	$+\infty$
$-x^2 + 5x - 4$	-	0	+	0	-

άρα όταν $x \in [1,4]$ έχουμε $-x^2 + 5x - 4 \geq 0$

Β3. $K = |x-4| + 2\cdot|x+1|$

Επειδή $x \in [1,4]$ έχουμε ότι $1 \leq x \leq 4$

$1 \leq x \leq 4 \overset{-4}{\Leftrightarrow} 1-4 \leq x-4 \leq 4-4 \Leftrightarrow -3 \leq x-4 \leq 0$ οπότε το $|x-4| = -x+4$

$1 \leq x \leq 4 \overset{+1}{\Leftrightarrow} 1+1 \leq x+1 \leq 4+1 \Leftrightarrow 2 \leq x+1 \leq 5$ οπότε το $|x+1| = x+1$

$K = |x-4| + 2\cdot|x+1| = -x+4+2(x+1) = -x+4+2x+2 = x+6$

Β4. $|\mathrm{K}|=7 \Leftrightarrow |x+6|=7 \Leftrightarrow x+6=7$ ή $x+6=-7 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-13$ που απορρίπτεται επειδή $x \in [1,4]$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}+\sqrt{3}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}-1\right)=\dfrac{2\cdot(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)\cdot(\sqrt{3}+1)}+\dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\alpha=\dfrac{2\cdot(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}^2-1^2}+\dfrac{3}{3}-\sqrt{3}=\dfrac{2\cdot(\sqrt{3}+1)}{3-1}+1-\sqrt{3}=\dfrac{\cancel{2}\cdot(\sqrt{3}+1)}{\cancel{2}}+1-\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$\alpha=\sqrt{3}+1+1-\sqrt{3}=2$.

Η συνάρτηση γίνεται: $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{x+1}$

Πρέπει $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$, οπότε η f έχει πεδίο ορισμού $A=\Re-\{-1\}$

Γ2. $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{x+1}$, παραγοντοποιούμε τον αριθμητή:

$\Delta=3^2-4\cdot 1\cdot 2=9-8=1$

$x_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\dfrac{-3\pm 1}{2} \Leftrightarrow$

$x_1=\dfrac{-3+1}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1$ ή $x_2=\dfrac{-3-1}{2}=\dfrac{-4}{2}=-2$, οπότε

$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ και ο τύπος της συνάρτησης γίνεται:

$f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{x+1}=\dfrac{(x+1)(x+2)}{x+1}=x+2,\ x \neq -1$.

Γ3. $f(x)=x+2,\ x \neq -1$.

Για $x=0$ έχουμε $f(0)=0+2=2$. Άρα τέμνει τον yy' στο σημείο $A(0,2)$.

Για $f(x)=0$ έχουμε $0=x+2 \Leftrightarrow x=-2$ που είναι δεκτή. Άρα τέμνει τον xx' στο σημείο $B(-2,0)$.

Γ4. $\beta = 49^{1/2} - \sqrt[f(1)]{23+\sqrt{f(8)+f(0)\cdot\sqrt[4]{81}}}$

Θα υπολογίσουμε πρώτα τα:

$f(1)=1+2=3$, $f(8)=8+2=10$, $f(0)=0+2=2$, οπότε

$\beta=\sqrt{49}-\sqrt[3]{23+\sqrt{10+2\cdot\sqrt[4]{81}}}=7-\sqrt[3]{23+\sqrt{10+2\cdot 3}}=7-\sqrt[3]{23+\sqrt{10+6}} \Leftrightarrow$

$\beta=7-\sqrt[3]{23+\sqrt{16}}=7-\sqrt[3]{23+4}=7-\sqrt[3]{27}=7-3=4$.

Γ5. Έστω η ευθεία $y=\kappa\cdot x+\lambda$. Επειδή έχει κλίση το $f(0)=2$ θα έχουμε $\kappa=2$ και η ευθεία γίνεται $y=2\cdot x+\lambda$.

Επίσης τέμνει τον yy' στο σημείο με τεταγμένη 4, δηλαδή διέρχεται από το σημείο $(0,4)$. Άρα βάζοντας όπου $x=0$ και $y=4$ έχουμε:

$4=2\cdot 0+\lambda \Leftrightarrow \lambda=4$. Άρα η ευθεία είναι η $y=2x+4$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. i) $\Delta=\left[-(4\lambda+8)\right]^2-4\cdot 1\cdot(4\lambda^2+12)=(4\lambda+8)^2-4(4\lambda^2+12) \Leftrightarrow$

$\Delta=16\lambda^2+64\lambda+64-16\lambda^2-48=64\lambda+16$

ii) Πρέπει $\Delta>0 \Leftrightarrow 64\lambda+16>0 \Leftrightarrow 64\lambda>-16 \Leftrightarrow \lambda>\frac{-16}{64} \Leftrightarrow \lambda>-\frac{1}{4}$

Οπότε έχουμε: $\lambda\in\left(-\frac{1}{4},+\infty\right)$.

Δ2. i) $S=x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{-(4\lambda+8)}{1}=4\lambda+8$

$P=x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{4\lambda^2+12}{1}=4\lambda^2+12$

ii) $A=(2x_1-3\lambda)\cdot(2x_2-3\lambda)-\lambda\cdot(\lambda-48) \Leftrightarrow$

$\mathrm{A} = 4x_1x_2 - 6x_1\lambda - 6x_2\lambda + 9\lambda^2 - \lambda^2 + 48\lambda \Leftrightarrow$

$\mathrm{A} = 4\cdot P - 6\lambda\left(x_1 + x_2\right) + 8\lambda^2 + 48\lambda = 4\cdot P - 6\lambda\cdot S + 8\lambda^2 + 48\lambda \Leftrightarrow$

$\mathrm{A} = 4\cdot\left(4\lambda^2 + 12\right) - 6\lambda\cdot\left(4\lambda + 8\right) + 8\lambda^2 + 48\lambda \Leftrightarrow$

$\mathrm{A} = 16\lambda^2 + 48 - 24\lambda^2 - 48\lambda + 8\lambda^2 + 48\lambda = 48$ που είναι ανεξάρτητη του λ.

Δ3. $|S - P| \le 4 \Leftrightarrow \left|4\lambda + 8 - \left(4\lambda^2 + 12\right)\right| \le 4 \Leftrightarrow \left|-4\lambda^2 + 4\lambda - 4\right| \le 4 \Leftrightarrow$

$\left|4\lambda^2 - 4\lambda + 4\right| \le 4 \Leftrightarrow \left|4\cdot\left(\lambda^2 - \lambda + 1\right)\right| \le 4 \Leftrightarrow |4|\cdot\left|\lambda^2 - \lambda + 1\right| \le 4 \Leftrightarrow$

$4\cdot\left|\lambda^2 - \lambda + 1\right| \le 4 \overset{:4>0}{\Leftrightarrow} \left|\lambda^2 - \lambda + 1\right| \le 1$ (2)

α' τρόπος:

Θα βρούμε το πρόσημο του $\lambda^2 - \lambda + 1$

$\Delta = (-1)^2 - 4\cdot1\cdot1 = 1 - 4 = -3 < 0$, οπότε το $\lambda^2 - \lambda + 1 > 0$,για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ άρα $\left|\lambda^2 - \lambda + 1\right| = \lambda^2 - \lambda + 1$

Η (2) γίνεται $\lambda^2 - \lambda + 1 \le 1 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda \le 0$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\lambda^2 - \lambda$		+	0	-	0	+	

Άρα όταν $\lambda \in [0,1]$ έχουμε $\lambda^2 - \lambda \le 0$ δεδομένου ότι ικανοποιεί και την προϋπόθεση ότι $\lambda \in \left(-\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

β' τρόπος:

Η (2) γίνεται: $-1 \le \lambda^2 - \lambda + 1 \le 1 \overset{-1}{\Leftrightarrow} -1 - 1 \le \lambda^2 - \lambda + 1 - 1 \le 1 - 1 \Leftrightarrow -2 \le \lambda^2 - \lambda \le 0$

Θα λύσουμε τις ανισώσεις: $-2 \le \lambda^2 - \lambda$ και $\lambda^2 - \lambda \le 0$ και θα πάρουμε τις κοινές τους λύσεις.

Έχουμε $-2 \le \lambda^2 - \lambda \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda + 2 \ge 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4\cdot1\cdot2 = 1 - 8 = -7 < 0$

x	$-\infty$ $+\infty$
$\lambda^2-\lambda+2$	+

έχουμε $\lambda\in\Re$ για να ισχύει $\lambda^2-\lambda+2\geq 0$.

Έχουμε $\lambda^2-\lambda\leq 0\Leftrightarrow\lambda(\lambda-1)\leq 0$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\lambda^2-\lambda$		+	0	-	0	+	

το $\lambda\in[0,1]$ για να ισχύει $\lambda^2-\lambda\leq 0$

Τελικά οι κοινές τους λύσεις δεδομένο ότι πρέπει να ισχύει

και $\lambda\in\left(-\dfrac{1}{4},+\infty\right)$ είναι $\lambda\in[0,1]$.

Δ4. Πρέπει για να έχει ρίζες αντίστροφες να ισχύει: $\Delta\geq 0$ και $P=1$.

Έχουμε $\Delta\geq 0\Leftrightarrow\lambda\in\left[-\dfrac{1}{4},+\infty\right)$

και $P=1\Leftrightarrow 4\lambda^2+12=1\Leftrightarrow 4\lambda^2=-11\Leftrightarrow\lambda^2=-\dfrac{11}{4}<0$, αδύνατη.

Τελικά δεν μπορεί να έχει ρίζες αντίστροφες.