ΤΑΞΗ: **3η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

Ημερομηνία: Σάββατο 13 Ιανουαρίου 2024
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 28

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ.16

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ.13

Α4. 1.Λάθος ,2. Σωστό ,3.Σωστό , 4.Λάθος ,5.Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f(x) = -2x^2 + \alpha x + \beta$

Α$\in C_f \Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow -\alpha + \beta = 2$

Β$\in C_f \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow -1 + \alpha + 2\beta = 0$

$$\begin{cases} -\alpha + \beta = 2 \\ \alpha + 2\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\beta = 3 \\ \alpha + 2\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

Β2.

$$\text{f(x)} = -2\chi^2 - x + 1$$
$$f'(x) = -4x - 1$$

-4x-1=0⇒4x=-1⇒x=$-\frac{1}{4}$

	$-\infty$	-1/4	$+\infty$
f'(x)	+	-	
f(x)	↗	↘	

Στο σημείο x=$-\frac{1}{4}$ η συνάρτηση f(x) παρουσιάζει ολικό μέγιστο το f$\left(-\frac{1}{4}\right)$=$\frac{-1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{8}{8} = \frac{9}{8}$

Β3. $f''(x) = -4<0$ άρα η $f'(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Πεδίο Ορισμού της .Η $f'(x)$ (ρυθμός μεταβολής) δεν έχει ακρότατα.

Β4. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x)}{4x^2-4} = \lim\limits_{x\to-1}\frac{-2\chi^2-x+1}{4(x^2-1)} = \lim\limits_{x\to-1}\frac{-2(x+1)(x-\frac{1}{2})}{4(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to-1}\frac{-2x+1}{4(x-1)} = -\frac{3}{8}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. α) Πρέπει 2+x$\neq$ 0 άρα x$\neq -2$

$$D_f = IR - \{-2\}$$

β) f'(x)=$\frac{(2-x)'(2+x)-(2-x)(2+x)'}{(2+x)^2} = \frac{-2-x-2+x}{(x+2)^2} = \frac{-4}{(2+x)^2}$

Γ2.

α) f'(x)= $\frac{-4}{(2+x)^2} < 0$

Αρα η f είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε

x$\in IR - \{-2\}$

β) Αν x$\in [-8,-6]$,να δείξετε ότι -2$\leq f(x) \leq -\frac{5}{3}$

x$\in [-8,-6]$ άρα -8$\leq x \leq -6 \Leftrightarrow$

$$f(-8) \geq f(x) \geq f(-6) \Leftrightarrow -2 \leq f(x) \leq -\frac{5}{3}$$

- f(-8)=$-\frac{5}{3}$
- f(-6)=-2

Γ3.

Σημείο επαφής $(0, f(0))$

$f(0)$=$\frac{2-0}{2+0} = 1$ άρα (0,1)

Η εξίσωση της εφαπτομένης εχει τη μορφή y=αx+β με α=$f'(x_0)$.

α=f'(0)=-1

y=-x+ β ,το σημείο (0,1) την επαληθεύει ,άρα 1=0+β$\Rightarrow \beta = 1$

y=-x+1

Γ4.

y=-x+1

xx΄ : -x+1=0⇒ $x = 1$ P(1,0)

yy΄ : y=0+1⇒ $y = 1$ Σ(0,1)

(ΣΟΡ)=$\frac{1}{2}(OP)(O\Sigma) = \frac{1}{2}|1|\,|1| = \frac{1}{2}$τ.μ

ΘΕΜΑ Γ

Δ1.

Η γραφική παράσταση της f(x) τέμνει τον άξονα των yy΄ σε σημείο με τεταγμένη 3 ,άρα f(0)=3 δηλ.

$0^2+(4\alpha+\beta)0+\alpha+2\beta=3 \Rightarrow \alpha + 2\beta = 3$ (1)

Η κορυφή της παραβολής Κ$\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, \frac{-\Delta}{4\alpha}\right)$ έχει τετμημένη 1.

Αρα $\frac{-4\alpha-\beta}{2} = 1 \Leftrightarrow -4\alpha - \beta = 2$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2)

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 3 \\ -4\alpha - \beta = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 3 \\ -8\alpha - 2\beta = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 3 \\ -7\alpha = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta = 3 \\ \alpha = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

Δ2.

Για α=-1και β=2 , $f(x)=\chi^2-2\chi+3$

i) Η C_g προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση της C_f

2 μονάδες δεξιά : $g(x)=f(x-2)=(x-2)^2-2(x-2)+3=x^2-6x+11$

ii) g΄(x)=2x-6

g΄(x)=0⇒ $2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$

	$-\infty$ 3	$+\infty$
g΄(x)	-	+
g(x)	↘	↗

x∈(-∞,3] η f(x) γνησίως φθίνουσα

x∈ $[3, +\infty)$ η f(x) γνησίως αύξουσα .

Στο σημείο χ=3 παρουσιάζει ολικό ελάχιστο g(3)=9-18+11=2.

iii) φ(x)=f(x)+g(x)=$2x^2$-8x+14, η γραφική παράσταση της φ(x) δεν βρίσκεται κάτω από την y=8 , άρα φ(x)≥ 8 δηλαδή $2x^2$-8x+14 ≥ 8 ⇒$2x^2$-8x+14-8≥ 0 ⇒

x^2-4 x +3≥ 0

Δ=16-12=4 , x=$\frac{4\pm 2}{2}$=3 ή 1

Η C_φ δεν είναι κάτω από την ευθεία y=8 για κάθε

x∈ $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$.

Δ3.

h(x)=$\sqrt{\varphi(\chi) - 8}$

i) φ(x)-8≥ 0 ⇒ $2x^2 - 8x + 6 \geq 0$

$$D_h = (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$$

ii) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\varphi(x)-8}{f(x+1)-3} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2-8x+6}{x^2-1} = 2\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-8x+6}{x^2-1} = 2\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = 2\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-3}{x+1} = -2$

Δ4.

h(x)=$\sqrt{\varphi(\chi) - 8}$

Για να υπάρχει εφαπτομένη της C_hπαράλληλη στον xx΄ πρέπει h'(x)=0

h'(x)=$\frac{4x-8}{2\sqrt{2x^2-8x+6}}$=$\frac{2x-4}{\sqrt{2x^2-8x+6}}$

h΄(x)=0⇒2x-4=0 άρα x=2 . Το x=2 όμως δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της h επομένως δεν υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης παράλληλη στον xx΄