ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΑΛΓΕΒΡΑ/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

Ημερομηνία: Σάββατο 13 Ιανουαρίου 2024
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη τριγωνομετρικής ταυτότητας, σχολικό βιβλίο σελίδα 60.

Α2. Ορισμός, σχολικό βιβλίο σελίδα 35.

Α3. α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Σωστό

ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. α) Έχουμε $\begin{cases} 2\alpha - \beta = 1 \\ -\alpha + 2\beta = 1 \end{cases} \Big|\, 2 \iff \begin{cases} 4\alpha - 2\beta = 2 \\ -\alpha + 2\beta = 1 \end{cases}$

Με πρόσθεση κατά μέλη των δύο εξισώσεων παίρνουμε $3\alpha = 3 \iff \alpha = 1$ και με αντικατάσταση στην εξίσωση $-\alpha + 2\beta = 1 \iff -1 + 2\beta = 1 \iff 2\beta = 2 \iff \beta = 1$.

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(\alpha, \beta) = (1,1)$.

β) Έχουμε $\begin{cases} 2\alpha - \beta = 1 \\ -6\alpha + 3\beta = -3 \end{cases} \Big|\, 3 \iff$

$$\begin{cases} 6\alpha - 3\beta = 3 \\ -6\alpha + 3\beta = -3 \end{cases} \Big|_{-1} \iff \begin{cases} 6\alpha - 3\beta = 3 \\ 6\alpha - 3\beta = 3 \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι οι δύο εξισώσεις ταυτίζονται άρα το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

Ακόμη, η λύση $(\alpha, \beta) = (1,1)$ επαληθεύει την κοινή εξίσωση $6 \cdot \alpha - 3 \cdot \beta = 3$ άρα είναι μια λύση από τις άπειρες.

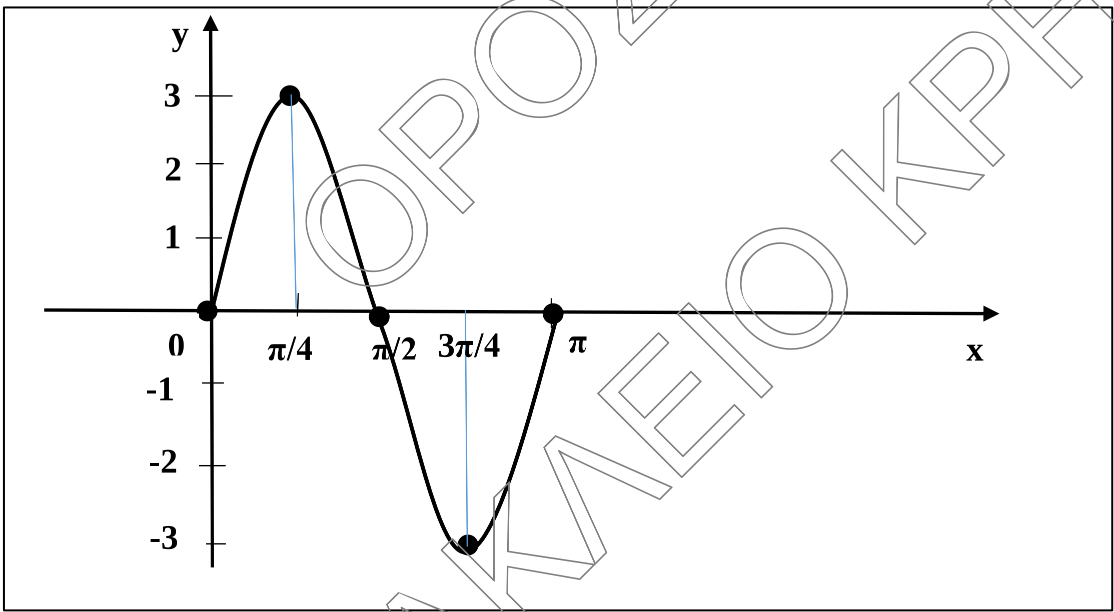
Β2. Για $\alpha = 1$ και $\beta = 1$, έχουμε :

$$f(x) = 3 \cdot \eta\mu 2x, x \in \mathbb{R}$$

α) $min_f = -3,\ max_f = 3,\ T = \frac{2\pi}{2} = \pi$

β)

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\eta\mu 2x$	0	1	0	-1	0
$f(x) = 3 \cdot \eta\mu 2x$	0	3	0	-3	0



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε :

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sigma\upsilon\nu\left(2\pi - \frac{\pi}{2} + x\right) = \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \eta\mu x$$

$$\eta\mu(3\pi + x) = \eta\mu(2\pi + \pi + x) = \eta\mu(\pi + x) = -\eta\mu x$$

$$\sigma\upsilon\nu(5\pi - x) = \sigma\upsilon\nu(4\pi + \pi - x) = \sigma\upsilon\nu(\pi - x) = -\sigma\upsilon\nu x$$

Οπότε

$$f(x) = \eta\mu x - (-\eta\mu x) + 2(-\sigma\upsilon\nu x) = 2\eta\mu x - 2\sigma\upsilon\nu x = 2(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)$$

Γ2. α) $g(x) = f(x) \cdot f(-x) = 2(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) \cdot 2[\eta\mu(-x) - \sigma\upsilon\nu(-x)] =$

$4(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) \cdot (-\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) = -4(\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x) \cdot (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) =$

$-4(\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x) = -4(\eta\mu^2 x - 1 + \eta\mu^2 x) = -4(2\eta\mu^2 x - 1) =$

$= 4(1 - 2\eta\mu^2 x).$

β) Για $x \in \mathbb{R}$ το $-x \in \mathbb{R}$ και $g(-x) = f(-x) \cdot f(x) = g(x)$ άρα η g άρτια.

Γ3. Για $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$g(x) = 2 \Leftrightarrow 4(1 - 2\eta\mu^2 x) = 2 \Leftrightarrow 1 - 2\eta\mu^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -2\eta\mu^2 x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\eta\mu^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{1}{2}$ ή $\eta\mu x = -\frac{1}{2}$

- $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ ή $\eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$

  $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}$.

- $\eta\mu x = \frac{-1}{2}$ ή $\eta\mu x = -\eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \left(-\frac{\pi}{6}\right)$ ή

  $x = 2\kappa\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}$.

Άρα το σύνολο λύσεων είναι

$$\left\{2\kappa\pi + \frac{\pi}{6},\ 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6},\ 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6},\ 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6}\right\} \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Γ4. Θα ελέγξουμε αν υπάρχει ακέραιος αριθμός κ τέτοιος ώστε να ισχύει $2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} = \frac{689\cdot\pi}{6}$.

Κάνοντας απαλοιφή παρονομαστών παίρνουμε $12\kappa\pi + 5\pi = 689\pi \Leftrightarrow 12\kappa\pi = 684\pi \Leftrightarrow$ $\kappa = 57$ *που είναι ακέραιος αριθμός.*

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αφού η C_f διέρχεται από το $A(1, \alpha)$ θα ισχύει $f(1) = \alpha$ οπότε :

$(3 - \alpha^2) \cdot 1 - 1 = \alpha \Leftrightarrow 3 - \alpha^2 - 1 = \alpha \Leftrightarrow 0 = \alpha^2 + \alpha - 2 \Leftrightarrow \alpha = 1$ ή $\alpha = -2$.

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot x + \beta$, $\alpha, \beta, x \in \mathbb{R}$ όταν $\alpha > 0$ είναι γνησίως αύξουσα ενώ όταν $\alpha < 0$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Για $\alpha = 1$ έχω $f(x) = 2x - 1$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Για $\alpha = -2$ έχω $f(x) = -x - 1$ η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Άρα $\boxed{\alpha = -2}$

Δ2. Το πεδίο ορισμού της g είναι $A = \mathbb{R}$ αφού $x^2 + 4 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω $x \in \mathbb{R}$ τότε $-x \in \mathbb{R}$ και

$$g(-x) = \frac{4(-x)}{(-x)^2 + 4} = \frac{-4x}{x^2 + 4} = -g(x)$$

άρα η g είναι περιττή στο $\mathbb{R}$.

Θα αποδείξουμε ότι $g(x) \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $g(2) = 1$.

Έχω $g(x) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{4x}{x^2+4} \leq 1 \Leftrightarrow 4x \leq x^2 + 4 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow (x-2)^2 \geq 0$ που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε ισχύει και η αρχική ανίσωση $g(x) \leq 1$.

Ακόμη το 1 είναι τιμή της g για $x = 2$ αφού $g(2) = \frac{4 \cdot 2}{2^2+4} = \frac{8}{8} = 1$.

Άρα η g παρουσιάζει για $x = 2$ μέγιστο με μέγιστη τιμή την 1.

Δ3. <u>α΄ τρόπος</u> Αφού η f είναι γνήσια φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ έχουμε :

$f(5 - \sigma\upsilon\nu^2 x) < f(4\eta\mu x) \Leftrightarrow 5 - \sigma\upsilon\nu^2 x > 4\eta\mu x \Leftrightarrow$

$5 - (1 - \eta\mu^2 x) > 4\eta\mu x \Leftrightarrow 4 + \eta\mu^2 x > 4\eta\mu x \Leftrightarrow$

$\eta\mu^2 x - 4\eta\mu x + 4 > 0 \Leftrightarrow (\eta\mu x - 2)^2 > 0$

που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού $\eta\mu x - 2 \neq 0$.

Άρα ισχύει και η αρχική ανίσωση.

<u>β΄ τρόπος</u> Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αντικαθιστώντας στην $f(x) = -x - 1$ παίρνουμε

$f(5 - \sigma\upsilon\nu^2 x) < f(4\eta\mu x) \Leftrightarrow -(5 - \sigma\upsilon\nu^2 x) - 1 > -4\eta\mu x - 1 \Leftrightarrow$

$-5 + \sigma\upsilon\nu^2 x < -4\eta\mu x \Leftrightarrow -5 + 1 - \eta\mu^2 x < -4\eta\mu x \Leftrightarrow$

$0 < \eta\mu^2 x - 4\eta\mu x + 4 \Leftrightarrow 0 < (\eta\mu x - 2)^2$

που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού $\eta\mu x - 2 \neq 0$. Άρα ισχύει και η αρχική ανίσωση.

<u>γ΄ τρόπος</u> Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και την $g(x) < 1$ (αφού $\eta\mu x \neq 2$). Θέτοντας όπου x το $\eta\mu x$ παίρνουμε

$$g(\eta\mu x) < 1 \Leftrightarrow \frac{4\eta\mu x}{\eta\mu^2 x + 4} < 1 \Leftrightarrow 4\eta\mu x < \eta\mu^2 x + 4 \Leftrightarrow$$

$$4\eta\mu x < 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x + 4 \Leftrightarrow 4\eta\mu x < 5 - \sigma\upsilon\nu^2 x \xLeftrightarrow{\eta\ f\ \varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha}$$

$$f(4\eta\mu x) > f(5 - \sigma\upsilon\nu^2 x).$$

Δ4. Έχουμε $\frac{5\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{8\pi}{8} = \pi$ άρα οι γωνίες είναι παραπληρωματικές.

Γνωρίζουμε ότι οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν ίσα ημίτονα δηλαδή $\eta\mu\frac{3\pi}{8} = \eta\mu\frac{5\pi}{8}$.

Άρα

$$g\left(-\eta\mu\frac{3\pi}{8}\right) = g\left(-\eta\mu\frac{5\pi}{8}\right) = -g\left(\eta\mu\frac{5\pi}{8}\right)$$

αφού η g περιττή συνάρτηση.

Επίσης $g(-2024) = -g(2024)$. Άρα με αντικατάσταση η εξίσωση γίνεται :

$$g(2024)\cdot x^2 - g\left(\eta\mu\frac{5\pi}{8}\right) - g(2024) + g\left(\eta\mu\frac{5\pi}{8}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$g(2024)\cdot x^2 - g(2024) = 0 \Leftrightarrow g(2024)\cdot(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow g(2024) = 0$$

ή $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ αφού η $g(2024) = 0$ απορρίπτεται.