

ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 13 Ιανουαρίου 2024

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ ΑΑ1. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\alpha - \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$.

Μονάδες 10

Α2. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με ένα μόνο στοιχείο της στήλης Β, ώστε να προκύπτουν αληθείς προτάσεις, μεταφέροντας στο τετράδιό σας τον πίνακα Ι σωστά συμπληρωμένο.

Στήλη Α (Ανισότητα)		Στήλη Β (Συμβολισμός)	
1	$-2 \leq x < 3$	Α	$x \in (-\infty, 3]$
2	$-2 < x \leq 3$	Β	$x \in (-2, 3]$
3	$x \leq 3$	Γ	$x \in [-2, 3)$
4	$x \geq -2$	Δ	$x \in (-\infty, 3)$
5	$x < 3$	Ε	$x \in [-2, +\infty)$

Πίνακας Ι				
1	2	3	4	5

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$.

β. Ισχύει $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$.

γ. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\alpha| \leq -\alpha$.

δ. Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ είναι αδύνατη για $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$.

ε. Η εξίσωση $|x| = \alpha$ έχει λύσεις τις $x = \alpha$ ή $x = -\alpha$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις:

B1. $2|x-3|-4=0$

Μονάδες 5

B2. $x^5 - 8x^2 = 0$.

Μονάδες 5

B3. $\frac{x+2}{x} + \frac{4}{x-2} = -\frac{8}{x^2-2x}$

Μονάδες 8

B4. $(x-2)(x^2-2x) - (9-2x)(x-2) = 0$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι παραστάσεις:

- $K = \frac{\sqrt{x^2 - 10x + 25}}{x - 5} - \frac{\sqrt{x^2 + 6x + 9}}{x + 3}$
- $\beta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 2}$

Γ1. Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός x ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

Μονάδες 5

Γ2. i) Αν $-3 < x < 5$ να βρεθεί η τιμή της παράστασης K .

Μονάδες 4

ii) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης β .

Μονάδες 4

Για $K = -2$ και $\beta = -6$.

Γ3. Να δείξετε ότι: $\frac{2 \cdot \beta \cdot x}{x^2 + \beta^2} \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Γ4. Να δείξετε ότι: $\sqrt[4]{\frac{(\beta^{-2} \cdot K^{-2})^3 \cdot K^4}{(\beta \cdot K^3)^2 : (\beta \cdot K)^4}} = 4$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda - 1)^2 \cdot x - 2x + \lambda = 2\lambda \cdot (1 - x) + 1$ (1) με $\lambda \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παίρνει την μορφή $(\lambda^2 - 1)x = \lambda + 1$.

Μονάδες 5

Δ2. Να λύσετε την εξίσωση (1) για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ .

Μονάδες 8

Για $x_0 = \frac{1}{\lambda-1}$ η μοναδική λύση της εξίσωσης (1) και για $\lambda \in (2,5)$:

Δ3. Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου ενός τετραγώνου πλευράς x_0 .

Μονάδες 6

Δ4. Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε να επαληθεύεται η εξίσωση $\left|x_0 - \frac{1}{2}\right| + \left|x_0^2 - \frac{1}{4}\right| = 0$.

Μονάδες 6