

ΤΑΞΗ: Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Τετάρτη 19 Απριλίου 2023
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής και να δοθεί η γεωμετρική του ερμηνεία.

Μονάδες 5

A3. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ .

Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο διάστημα Δ ;

Μονάδες 3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

(α) Αν $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, είναι 1-1 συνάρτηση και f^{-1} είναι η αντίστροφη της, τότε $f^{-1}(f(y)) = y$ για κάθε $y \in A$

(β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

(γ) Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $n \geq 2$, η οποία έχει ασύμπτωτη.

- (δ) Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού ,τη χρονική στιγμή t_0 , είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x = s(t)$ τη χρονική στιγμή t_0 δηλαδή είναι $u(t_0) = s'(t_0)$
- (ε) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό , τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} e^{-x} + \alpha, & x \leq 0 \\ -x^2 + 3, & x > 0 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$

- B1.** Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$.

Μονάδες 7

- B2.** Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

Μονάδες 6

- B3.** Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -x$.

Μονάδες 7

- B4.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu(f(x))}{f(x)}$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = x - \frac{8x}{x^2 - 1} + \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} f(x) dx$ με πεδίο ορισμού

$$A = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty).$$

Γ1. (i) Να δείξετε ότι $\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} f(x) dx = 0$.

Μονάδες 3

(ii) Να δείξετε ότι η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της f στο $+\infty$.

Μονάδες 3

Γ2. (i) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα του πεδίου ορισμού της και να βρείτε το σύνολο τιμών της $f(A)$.

Μονάδες 5

(ii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - ax^2 - 9x + a = 0$ έχει τρεις πραγματικές ρίζες για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Γ3. Να βρείτε το σημείο καμπής της f και να δείξετε ότι η ευθεία $y = 9x$ διαπερνά την C_f στο $M(0, f(0))$.

Μονάδες 5

Γ4. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $\kappa \in (0, 1)$ ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) + (\kappa - 10)x^2 + x^3 f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2 f(x) - x^3 + \kappa^2 x^2} = e^\kappa$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x - x^2$

και η σχέση : $2f(\beta) \ln x \leq x - 1$ η οποία ισχύει για κάθε $x > 0$.

Δ1. (i) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε το σημείο καμπής της f .

Μονάδες 4

(ii) Να δείξετε ότι f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} και τέμνει τον άξονα x' σε μοναδικό σημείο $M(\alpha, 0)$ με $\alpha \in (-1, 0)$.

Μονάδες 5

Δ2. Να δείξετε ότι $f(\beta) = \frac{1}{2}$ με $\alpha < \beta < 0$.

Μονάδες 6

Δ3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f^2(x)(f(x) - 1)^2$ έχει δύο τοπικά ελάχιστα και ένα τοπικό μέγιστο.

Μονάδες 6

Δ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 f(\sqrt{x}) dx$.

Μονάδες 4