

**ΤΑΞΗ:** Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ:** ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**Ημερομηνία:** Τετάρτη 19 Απριλίου 2023  
**Διάρκεια Εξέτασης:** 2 ώρες

## ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ Α.

**A1.** (α) Τι ονομάζουμε συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$  ενός διανύσματος  $\vec{a} = (x, y)$  με  $x \neq 0$ .

**Μονάδες 3**

(β) Αν  $\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{\beta} = (x_2, y_2)$  διανύσματα με  $\vec{a}, \vec{\beta} \parallel y'y$  και  $\lambda_1, \lambda_2$  οι συντελεστές διεύθυνσης των  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι  $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$ .

**Μονάδες 6**

**A2.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

(α) Η εξίσωση  $y - y_0 = \lambda(x - x_0), \lambda \in \mathbb{R}$  παριστάνει για τις διάφορες τιμές του  $\lambda$  όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο  $M(x_0, y_0)$ .

(β) Δύο αντίθετα διανύσματα έχουν αντίθετους συντελεστές διεύθυνσης.

(γ) Η εξίσωση  $x^2 + y^2 + \kappa \cdot x + \lambda \cdot y = 0$  με  $\kappa \neq 0$  ή  $\lambda \neq 0$ , παριστάνει πάντα κύκλο.

(δ) Όλα τα σημεία της παραβολής  $y^2 = 2\rho x$ ,  $\rho < 0$ , εκτός του  $O(0, 0)$  έχουν θετική τετμημένη.

(ε) Η έλλειψη  $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  στο σημείο της  $M(x_1, y_1)$  έχει εφαπτομένη με εξίσωση  $\beta^2 \cdot x_1 \cdot x + \alpha^2 \cdot y_1 \cdot y = \alpha^2 \cdot \beta^2$

**Μονάδες 10**

**A3.** Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό καθεμιάς από τις παρακάτω ημιτελείς προτάσεις και δίπλα σε αυτόν το γράμμα που αντιστοιχεί στη σχέση ή πρόταση που την συμπληρώνει σωστά.

1. Αν  $E'$ ,  $E$  οι εστίες μιας έλλειψης με μεγάλο άξονα μήκους  $2\alpha$  και  $M$  τυχαίο σημείο της έλλειψης, τότε

**A.**  $(ME') - (ME) = 2\alpha$

**B.**  $(ME') + (ME) = \alpha$

**Γ.**  $(ME') + (ME) = 2\alpha$

**Δ.**  $(ME') - (ME) = \alpha$

2. Έστω ευθεία  $(\varepsilon)$  που διέρχεται από το σημείο  $A(x_0, y_0)$  και είναι παράλληλη με το διάνυσμα  $\vec{v} = (\alpha, \beta)$  με  $\alpha, \beta \neq 0$ . Τότε η εξίσωση της ευθείας είναι

**A.**  $\frac{y - y_0}{\beta} = \frac{x - x_0}{\alpha}$

**B.**  $y - y_0 = \beta(x - x_0)$

**Γ.**  $\frac{x - x_0}{y - y_0} = \frac{\beta}{\alpha}$

**Δ.**  $y - y_0 = -\frac{\beta}{\alpha}(x - x_0)$

**Μονάδες 6**

## ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα σημεία  $A(0,8)$  και  $B(4,0)$  του τριγώνου  $OAB$  όπου  $O$  η αρχή των αξόνων.

**B1.** Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς  $AB$  και τις συντεταγμένες του μέσου της  $M$ .

Μονάδες 7

**B2.** Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου  $(\varepsilon)$  της πλευράς  $AB$  και το σημείο  $\Gamma$  που η  $(\varepsilon)$  τέμνει τον  $x'x$  άξονα.

Μονάδες 7

**B3.** Να βρείτε σημείο  $\Delta$  του επιπέδου ώστε το τετράπλευρο  $\Gamma MB\Delta$  να είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 6

**B4.** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα  $B\Gamma$

Μονάδες 5

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται ο κύκλος  $C_1$  με κέντρο την αρχή των αξόνων  $O(0,0)$  και ακτίνα 2 καθώς και η εξίσωση  $C_2: x^2 + y^2 - 8x - 6y + \alpha = 0$  με  $x, y, \alpha \in \mathbb{R}$ .

**Γ1. (α)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $C_2$  παριστάνει κύκλο όταν  $\alpha < 25$

Μονάδες 3

**(β)** Να γράψετε για τον κύκλο με εξίσωση  $C_2$

i) το κέντρο του.

ii) την ακτίνα του, συναρτήσει της παραμέτρου  $\alpha$ .

Μονάδες 2

**Γ2.** Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου  $C_1$  και να βρείτε για ποια τιμή του  $\alpha$  οι κύκλοι  $C_1, C_2$  εφάπτονται εξωτερικά.

**Μονάδες 5**

Για  $\alpha = 16$

**Γ3.** Να βρείτε την εξίσωση της διακέντρου και να αποδείξετε ότι η εξίσωση της κοινής τους εφαπτομένης στο κοινό τους σημείο είναι η  $\varepsilon: 4x + 3y - 10 = 0$ .

**Μονάδες 8**

**Γ4. α)** Να κάνετε ένα πρόχειρο σχήμα χαράζοντας τους δύο κύκλους  $C_1, C_2$  και την ευθεία ( $\varepsilon$ )

**Μονάδες 2**

**β)** Αν η εφαπτομένη  $\varepsilon$  τέμνει τους άξονες  $x'x, y'y$  στα σημεία  $A$  και  $B$  αντίστοιχα, να βρείτε το συνολικό εμβαδόν των περιοχών του επιπέδου που βρίσκονται εντός του τριγώνου  $OAB$  και εκτός του κύκλου  $C_1$ , όπου  $O(0,0)$  η αρχή των αξόνων.

**Μονάδες 5**

#### ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (\kappa - 3, -2)$  και  $\vec{\beta} = (-1, 3)$  με  $1 < \kappa < 7$

και η παραβολή  $(C_1): y = (1 - 2\kappa) \cdot x^2$ .

**Δ1.** Αν  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 135^\circ$  να αποδείξετε ότι  $\kappa = 2$ .

**Μονάδες 8**

Για  $\kappa = 2$

**Δ2. α)** Να βρείτε την παράμετρο  $\rho$  της παραβολής  $C$ , την εστία της  $E$  και την εξίσωση της διευθετούσας της  $\delta$ .

**Μονάδες 3**

**β)** Να χαράξετε πρόχειρα τη γραφική παράσταση της παραβολής  $C$  επισημαίνοντας την εστία  $E$  και τη διευθετούσα  $\delta$ .

**Μονάδες 2**

**Δ3.** Αν είναι  $\overrightarrow{AB} = \vec{\beta}$  με  $A, B$  σημεία της παραβολής, να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων  $A, B$ .

**Μονάδες 7**

**Δ4.** Αν  $\Delta$  η προβολή του σημείου  $A$  στη διευθετούσα  $\delta$ , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι ισοσκελές, όπου  $E$  η εστία της παραβολής.

**Μονάδες 5**