



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2023

Α' ΦΑΣΗ

Ε_3.Μλ3ΘΟ(ε)

ΤΑΞΗ: Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Πέμπτη 5 Ιανουαρίου 2023

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό .

Μονάδες 7

A2. Πότε μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ θα λέμε ότι είναι 1-1 στο A ;

Μονάδες 3

A3. Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών .

Μονάδες 5

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

(α) Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι και 1-1.

(β) Αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ υπάρχει τότε η f είναι κατ' ανάγκη παραγωγίσιμη στο x_0

(γ) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g για τις οποίες ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, ισχύει $f \circ g = g \circ f$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2023

Α' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ3ΘΟ(ε)

(δ) Η συνάρτηση $f(x) = \sin x$ με $x \in \mathbb{R}$ έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου

(ε) Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $0 < \alpha \neq 1$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x} + 1$, $x \geq 0$ και $g(x) = \frac{2x+1}{x-2}$, $x \neq 2$

B1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να αποδείξετε ότι η αντίστροφή της είναι η συνάρτηση $f^{-1}(x) = (x-1)^2$, $x \geq 1$

Μονάδες 7

B2. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f^{-1} η οποία διέρχεται από το σημείο $A(0, -3)$

Μονάδες 7

B3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g \circ g$ είναι άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων f, f^{-1} .

Μονάδες 6

B4. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left(g(x) \cdot \ln \left(\frac{1}{2x+1} \right) \right)$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f: (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $(x-1)f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 1$ για κάθε $x \leq 1$
- $g^2(x) = 2xg(x) + 3$ για κάθε $x \geq 1$
- η g έχει ελάχιστη τιμή το 3 στη θέση 1

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2023
Α' ΦΑΣΗ

E_3.Μλ3ΘΟ(ε)

Γ1. (α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^3 + x + 1, x \leq 1$

Μονάδες 4

(β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και στην συνέχεια αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (-1, 0)$ ώστε $f(x_0) = 0$.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι $g(x) = x + \sqrt{x^2 + 3}, x \geq 1$

Μονάδες 6

Γ3. Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu(f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f\left(\frac{x_0}{2}\right) \right)^{g(x)} + f(x)$

Μονάδες 4

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(-x_0)+1}{x} + \frac{f(x+x_0)}{x-1} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^{x-1} + 1$, και

$g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \begin{cases} \ln x + 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1) - g(1-h)}{h}, & 0 < x < 1 \\ -\frac{1}{x} + 3\kappa, & x \geq 1 \end{cases}$ όπου $\kappa \in \mathbb{R}$

Δ1. (α) Να αποδείξετε $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1) - g(1-h)}{h} = g'(1)$

Μονάδες 2

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2023
Α΄ ΦΑΣΗ

E_3.Μλ3ΘΟ(ε)

(β) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 1$ και ότι $g(x) = \begin{cases} \ln x + 2, & 0 < x < 1 \\ -\frac{1}{x} + 3 & x \geq 1 \end{cases}$

Μονάδες 7

- Δ2.** Να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο σημείο της $A(1, g(1))$ και να αποδείξετε ότι εφάπτεται στην C_f .

Μονάδες 6

- Δ3.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ώστε $g'(x_0) = f(x_0)$

Μονάδες 5

- Δ4.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = f(x) + x$ είναι γνησίως αύξουσα και να δείξετε ότι ισχύει $e^{g(x)-1} - 2 \geq e - g(x)$ για κάθε $x \geq 1$

Μονάδες 5