

ΤΑΞΗ: 3^η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Πέμπτη 5 Ιανουαρίου 2023

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη σχολικό βιβλίο σελίδα 31

A2. Ορισμός σχολικό βιβλίο σελίδα 13

A3.

Πίνακας Γ					
1.	2.	3.	4.	5.	6.
ΣΤ	Δ	Α	Β	Γ	Ε

A4. (α) ΛΑΘΟΣ (β) ΣΩΣΤΟ (γ) ΣΩΣΤΟ (δ) ΛΑΘΟΣ (ε) ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ Β

$$\mathbf{B1.} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 - 5x + 6)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 5x + 6) = 2$$

B2.

(α) Αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι συνεχής και στο $x_0 = 1$ επομένως

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 3 = 2 \Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

$$\mathbf{(β)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 5x + 6)(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x} - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 2)(x - 3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 2)(x - 3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x - 2)(\sqrt{x} + \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2023

Α΄ ΦΑΣΗ

E_3.ΜΕΛ3Γ(α)

B3. Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f σημείο $A(0, f(0))$.

Έχουμε $f(x) = x^2 - 5x + 6$ οπότε $f(0) = 6$ άρα $A(0, 6)$

Επίσης $f'(x) = 2x - 5$ και $f'(0) = -5$ άρα $\lambda = f'(0) \Leftrightarrow \lambda = -5$

Το σημείο $A(0, 6)$ ανήκει στην $y = \lambda x + \beta$ δηλαδή $6 = -5 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 6$

Οπότε η εφαπτομένη έχει εξίσωση $y = -5x + 6$

B4. Η f έχει παράγωγο την $f'(x) = 2x - 5$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

Το πρόσημο της f' και τα διαστήματα μονοτονίας της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+
$f(x)$	↘		↗

Η f γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$

Οι αριθμοί -2023 και -2022 βρίσκονται στο διάστημα $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$ στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα οπότε $-2023 < -2022 \Leftrightarrow f(-2023) > f(-2022)$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 2 ισχύει $f(0) = 2$ άρα $\beta = 2$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2023

Α' ΦΑΣΗ

Ε_3.ΜΕΛ3Γ(α)

Η παράγωγός της f είναι $f'(x) = 3x^2 - 2\alpha x$, από τα δεδομένα της άσκησης γνωρίζουμε ότι $f'(1) = -3 \Leftrightarrow 3 - 2\alpha = -3 \Leftrightarrow 2\alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha = 3$

Επομένως $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

Γ2. Έστω $M(x_0, f(x_0))$ σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

Αφού η εφαπτομένη στο σημείο M είναι παράλληλη με την ευθεία $y = -3x + 1$

Θα ισχύει: $f'(x_0) = -3 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = -3 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$$

Άρα το σημείο είναι το $M(1, f(1))$ όπου $f(1) = 0$ δηλαδή το $M(1, 0)$

Η εξίσωση εφαπτομένης έχει την μορφή $y = \lambda x + \beta$ όπου $\lambda = -3$ και το σημείο $M(1, 0)$ ανήκει στην ευθεία επομένως: $0 = -3 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = 3$

Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση $y = -3x + 3$

Γ3. Επειδή $f(1) = 0$ το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)}{h}$ γράφεται

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1) \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = -3$$

Γ4. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f είναι η $f'(x)$. Ψάχνουμε να βρούμε πότε η $f'(x) = 3x^2 - 6x$ γίνεται ελάχιστη.

$$f''(x) = 6x - 6 \text{ άρα } f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow 6x = 6 \Leftrightarrow x = 1$$

Το πρόσημο της f'' και τα διαστήματα μονοτονίας της f' φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$	↘		↗

Άρα για $x=1$ ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f γίνεται ελάχιστος και αυτό συμβαίνει στο σημείο $(1, f(1))$ ή $(1, 0)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση $f(x) = 6 - \sqrt{x^2 + 4}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} = 0 \Leftrightarrow -x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} > 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0$$

Άρα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$		+	-
$f'(x)$			

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$

Στη θέση $x = 0$ έχει μέγιστο το $f(0) = 4$

Δ2. Για το όριο έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - x^2}{f(x) - 4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - x^2}{2 - \sqrt{x^2 + 4}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^4 - x^2)(2 + \sqrt{x^2 + 4})}{(2 - \sqrt{x^2 + 4})(2 + \sqrt{x^2 + 4})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(x^2 - 1)(2 + \sqrt{x^2 + 4})}{2^2 - (\sqrt{x^2 + 4})^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(x^2 - 1)(2 + \sqrt{x^2 + 4})}{4 - x^2 - 4} =$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2023

Α΄ ΦΑΣΗ

Ε_3.ΜΕΛ3Γ(α)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(x^2 - 1)(2 + \sqrt{x^2 + 4})}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x^2 + 1)(2 + \sqrt{x^2 + 4}) = 4$$

Δ3. (i) Αν συμβολίσουμε με y την τρίτη πλευρά του οικοπέδου τότε θα έχουμε
 $2x + y = 100 \Leftrightarrow y = 100 - 2x$ (1)

Το εμβαδόν του οικοπέδου είναι
 $E = x \cdot y$ και λόγω της σχέσης (1)
 προκύπτει

$$E(x) = x \cdot (100 - 2x) \Leftrightarrow E(x) = -2x^2 + 100x$$

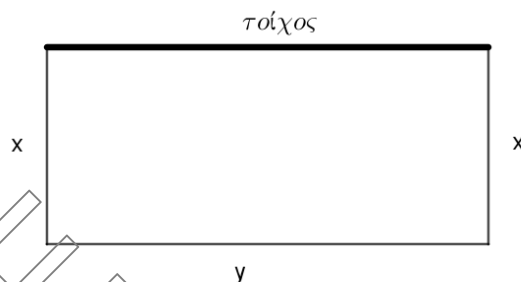
Πρέπει $x > 0$ και $y > 0$ άρα $100 - 2x > 0 \Leftrightarrow 2x < 100 \Leftrightarrow x < 50$

Άρα $0 < x < 25$

(ii) Η συνάρτηση $E(x) = -2x^2 + 100x$ έχει παράγωγο $E'(x) = -4x + 100$

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 100 = 0 \Leftrightarrow x = 25$$

$$E'(x) > 0 \Leftrightarrow -4x + 100 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 25$$



x	0	25	50
$E'(x)$	+	○	-
$E(x)$	↗		↘

Άρα για $x = 25$ το εμβαδόν γίνεται μέγιστο

Όταν $x = 25$ τότε $y = 100 - 2 \cdot 25 \Leftrightarrow y = 50$