

**ΤΑΞΗ:** Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ:** ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**Ημερομηνία:** Πέμπτη 5 Ιανουαρίου 2023  
**Διάρκεια Εξέτασης:** 2 ώρες

### ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

#### ΘΕΜΑ Α

**A1. α)** Αν  $M$  το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος  $AB$  και  $O$  σημείο αναφοράς στο χώρο να αποδείξετε ότι  $\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$ .

**Μονάδες 9**

**β)** Επιπλέον αν  $A(x_1, x_2), B(x_2, y_2)$  και  $M(x, y)$  να αποδείξετε ότι  $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$  και  $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ .

**Μονάδες 6**

**A2.** Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό καθεμιάς από τις παρακάτω προτάσεις και δίπλα το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι σωστή, το γράμμα Λ αν η πρόταση είναι λάθος.

α) Για κάθε διάνυσμα  $\vec{a}$  και  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  αν ισχύει  $\lambda \cdot \vec{a} = \mu \cdot \vec{a}$  τότε  $\lambda = \mu$ .

β) Ο συντελεστής διεύθυνσης  $\lambda$  μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία  $A(x_1, x_2)$  και  $B(x_2, y_2)$  με  $x_1 \neq x_2$  είναι  $\lambda = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ .

γ) Για τα διανύσματα  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$  με  $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$  ισχύει πάντα  $\vec{a} = \vec{0}$  ή  $\vec{\beta} = \vec{0}$ .

δ) Οι ευθείες με εξισώσεις  $x = 1$  και  $y = 0$  είναι κάθετες.

ε) Αν  $\vec{a} \cdot \vec{\beta} - |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}| = 0$  τότε  $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a} = 3 \cdot \vec{i} - \vec{j}$ ,  $\vec{b} = (5, 3)$  και  $\vec{\gamma}$  του επιπέδου για τα οποία ισχύει  $\vec{a} + 2\vec{\gamma} = \vec{b}$ .

**B1.** Να δείξετε ότι  $\vec{\gamma} = (1, 2)$ .

**Μονάδες 7**

**B2.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ( $\epsilon$ ) που διέρχεται από το  $A(-1, 4)$  και είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{\gamma}$ .

**Μονάδες 4**

**B3.** Αν  $B$ ,  $\Gamma$  είναι τα σημεία τομής της ευθείας ( $\epsilon$ ) με τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  αντίστοιχα να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται

- (i) η διάμεσος  $OM$  του τριγώνου  $OBF$ .
- (ii) το ύψος  $OK$  του τριγώνου  $OBF$ .

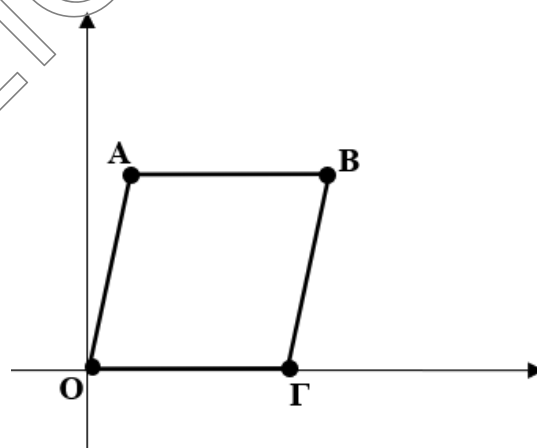
**Μονάδες 14**

**ΘΕΜΑ Γ**

Στο σχήμα δίνεται ρόμβος  $OAB\Gamma$  πλευράς 4cm

και η γωνία  $\Gamma\hat{O}A = \frac{\pi}{3}$ .

**Γ1.** Να δείξετε ότι το σημείο  $A$  ανήκει στην ευθεία  $y = \sqrt{3} \cdot x$  και ότι οι κορυφές του ρόμβου έχουν συντεταγμένες  $A(2, 2\sqrt{3}), B(6, 2\sqrt{3}), \Gamma(4, 0)$ .



**Μονάδες 7**

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2023**  
Α΄ ΦΑΣΗ

**E\_3.Μλ2Θ(ε)**

- Γ2.** Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου  $K$  του ρόμβου και τις εξισώσεις των ευθειών πάνω στις οποίες βρίσκονται οι πλευρές του.

**Μονάδες 6**

- Γ3.** Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα

i)  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$  , ii)  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BA}$  , iii)  $\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{KB}$  , iv)  $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AO}$

**Μονάδες 6**

- Γ4.** Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $M(x, y)$  του επιπέδου για τα οποία ισχύει η σχέση  $\overrightarrow{GM} \cdot (\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{KB}) + \overrightarrow{OA}^2 = \overrightarrow{KG} \cdot \overrightarrow{AM}$  είναι ευθεία κάθετη στην ευθεία της διαγωνίου  $AG$ .

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  με  $|\vec{\alpha}| + 2|\vec{\beta}| = 5$  και τα παράλληλα διανύσματα  $\vec{u} = (|\vec{\alpha}|, 1), \vec{v} = (|\vec{\beta}|, 2)$ .

- Δ1.** Αποδείξτε ότι  $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2$  και ότι  $\vec{u} \uparrow \vec{v}$ .

**Μονάδες 6**

Αν επιπλέον ισχύει :  $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (5\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})$

- Δ2.** Να αποδείξετε ότι : (i)  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 1$  (ii)  $\left( \vec{\alpha}, \vec{\beta} \right) = \frac{\pi}{3}$ .

**Μονάδες 6**

**Δ3.** Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς  $x$  και  $y$  λύνοντας τις εξισώσεις

$$4 \cdot |2\vec{\alpha} - \vec{\beta}| \cdot x = \sqrt{2} \cdot |\vec{v} - \vec{u}|$$

και

$$\frac{\vec{\alpha} \cdot (y \cdot \vec{\alpha} + 2\vec{\beta})}{|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|} \cdot \vec{\alpha} = (1 - y) \cdot \vec{\alpha}$$

**Μονάδες 8**

**Δ4.** Αν το διάνυσμα  $\vec{a}$  είναι ομόρροπο του θετικού ημιάξονα  $\vec{Ox}$  και το

$$\vec{OB} = \vec{\beta} \text{ βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο να αποδείξετε ότι } \left( \vec{\beta}, \vec{u} \right) = \frac{\pi}{12}$$

**Μονάδες 5**