

ΤΑΞΗ: Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Παρασκευή 7 Ιανουαρίου 2022
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σελίδα 60.Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες.

A2. Σελίδα 31.Ορισμός.

A3. 1.Λ, 2.Σ, 3.Λ, 4.Λ, 5.Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Αν $\lambda = 1$, τότε το σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow x+y=1$.

Το τελευταίο έχει άπειρες λύσεις, επομένως οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ταυτίζονται (συμπίπτουν).

Αν $\lambda = -1$, τότε το σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα $\begin{cases} -x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-1 \\ x-y=1 \end{cases}$.

Το τελευταίο είναι αδύνατο, επομένως οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες.

B2. Η σχετική θέση των ευθειών εξαρτάται από τις λύσεις του συστήματος των

εξισώσεων τους, δηλαδή από το σύστημα $\begin{cases} \lambda x + y = \lambda^2 \\ x + \lambda y = 1 \end{cases} (\Sigma)$

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1),$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \lambda^2 & 1 \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1), D_y = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda - \lambda^2 = -\lambda(\lambda - 1)$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2022
Α' ΦΑΣΗ

Ε_3.Μλ2ΓΑ(α)

Αν $D \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -1 \text{ και } \lambda \neq 1$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση.

$$(\Sigma) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{D_x}{D} \\ y = \frac{D_y}{D} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)}{(\lambda - 1)(\lambda + 1)} \\ y = \frac{-\lambda(\lambda - 1)}{(\lambda - 1)(\lambda + 1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{\lambda + 1} \\ y = \frac{-\lambda}{\lambda + 1} \end{cases}, \text{ επομένως οι ευθείες } \varepsilon_1, \varepsilon_2$$

τέμνονται στο σημείο $M\left(\frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{\lambda + 1}, -\frac{\lambda}{\lambda + 1}\right)$.

B2. Αν $\lambda = 0$, τότε από B1, οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται στο σημείο $M\left(\frac{0^2 + 0 + 1}{0 + 1}, -\frac{0}{0 + 1}\right)$,

δηλαδή $M(1, 0)$. Το σημείο $M(1, 0)$ προφανώς ανήκει και στην ευθεία ε_3 , αφού οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της, συνεπώς οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ διέρχονται από το σημείο $M(1, 0)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $2\eta\mu 2\alpha - \eta\mu 2\alpha \sin^2 2\alpha - \eta\mu^3 2\alpha = \eta\mu 2\alpha(2 - \sin^2 2\alpha - \eta\mu^2 2\alpha) =$
 $\eta\mu 2\alpha[2 - (\sin^2 2\alpha + \eta\mu^2 2\alpha)] = \eta\mu 2\alpha(2 - 1) = \eta\mu 2\alpha.$

Γ2.

i) $f(x) = 2(2\eta\mu 2x - \eta\mu 2x \sin^2 2x - \eta\mu^3 2x)$ Από Γ1, αν θεωρήσουμε $\alpha = 2x$ τότε $f(x) = 2\eta\mu 2x, A = \mathbb{R}$.

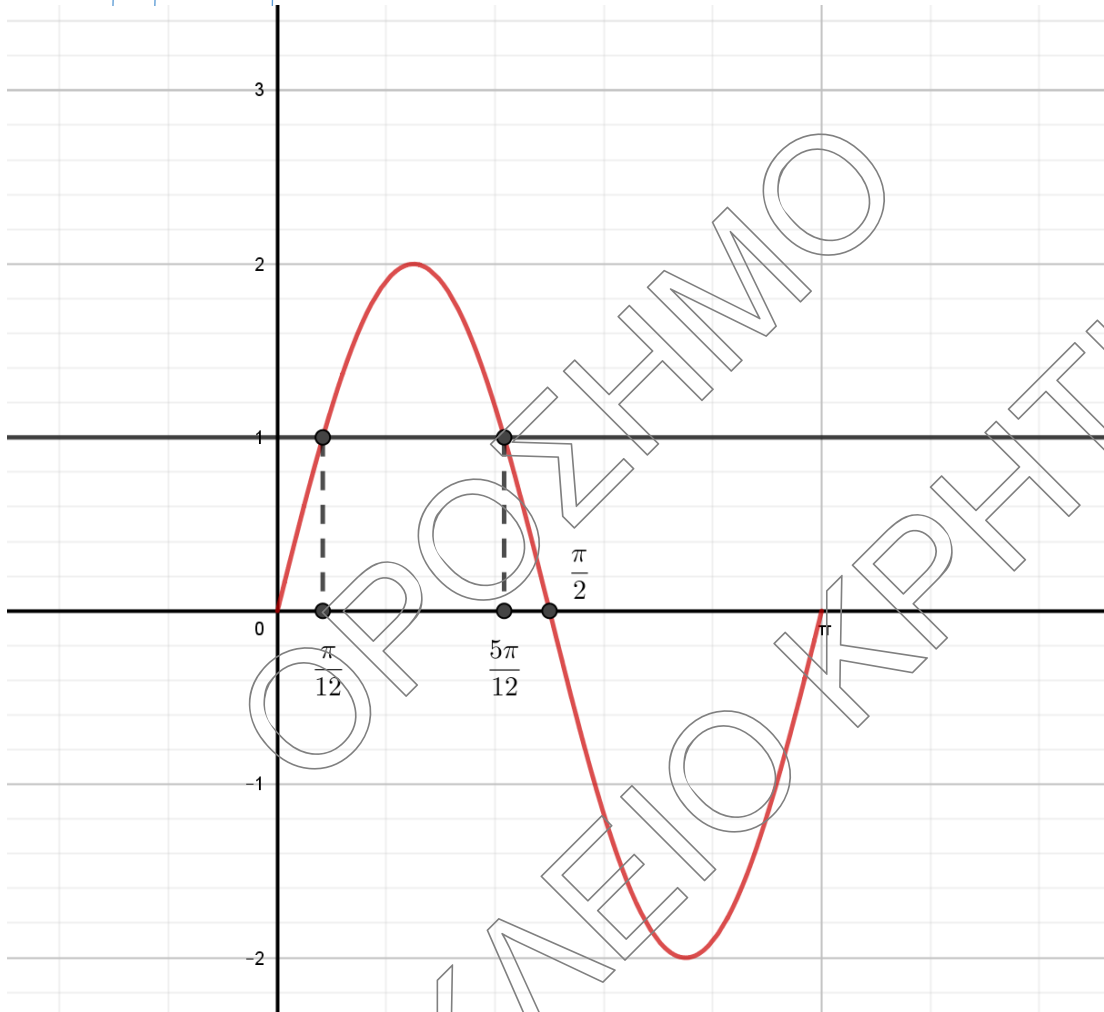
Για κάθε $x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ και $f(-x) = 2\eta\mu 2(-x) = -2\eta\mu 2x = -f(x)$. Η συνάρτηση είναι περιττή.

ii) Από θεωρία είναι γνωστό ότι η συνάρτηση $f(x) = \rho\eta\mu(\omega x), \rho > 0$ έχει ελάχιστο $-\rho$, μέγιστο ρ και περίοδο $\frac{2\pi}{\omega}$. Για $\rho = 2$ και $\omega = 2$, προκύπτει,

Μέγιστη τιμή 2, Ελάχιστη -2 και περίοδος $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

Γ3. Κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f(x)$	0	2	0	-2	0



Γ4. $f(x)=1 \Leftrightarrow 2\eta\mu 2x=1 \Leftrightarrow \eta\mu 2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu 2x=\eta\mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2x=2k\pi+\frac{\pi}{6} \\ 2x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6} \end{cases} k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x=k\pi+\frac{\pi}{12} \\ x=k\pi+\frac{5\pi}{12} \end{cases} k \in \mathbb{Z}. \text{ Επειδή, } x \in [0, \pi] \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12} \text{ ή } x=\frac{5\pi}{12}.$$

Στο σχήμα του Γ3 επαληθεύεται από τη γραφική παράσταση ότι η ευθεία $y=1$ τέμνει τη γραφική παράσταση σε δύο σημεία που ασφαλώς έχουν τετμημένες $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$.

ΘΕΜΑ Α

Δ1. Για να έχει νόημα το $f(x)$ πρέπει $\alpha - \eta\mu^2 x \neq 0$. Για $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ είναι $\eta\mu^2 x = 1$.

Από τα προηγούμενα και το πεδίο ορισμού A συμπεραίνουμε ότι

$$\alpha - \eta\mu^2 x = 0 \Leftrightarrow \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

Δ2. i) Έχουμε $\sin x \leq 1 \Leftrightarrow 1 - \sin x \geq 0$ και $1 - \eta\mu^2 x = \sin^2 x > 0$ για $x \in A$. Επομένως
 $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in A$

ii) Παρατηρούμε ότι για $x=0$ είναι $f(0)=0$. Άρα $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in A$.

Επομένως η f παρουσιάζει ολικό ακρότατο στη θέση $x=0$ και συγκεκριμένα ολικό ελάχιστο.

Δ3. i) Από την υπόθεση έχουμε $g(x) = f(x - \pi) = \frac{1 - \sin(x - \pi)}{1 - (\eta\mu(x - \pi))^2} = \frac{1 - (-\sin x)}{1 - (-\eta\mu x)^2} = \frac{1 + \sin x}{1 - \eta\mu^2 x}$

ii) α' τρόπος

$$\begin{aligned} g^2(x) > f^2(x) &\Leftrightarrow g^2(x) - f^2(x) > 0 \Leftrightarrow (g(x) + f(x))(g(x) - f(x)) > 0 \Leftrightarrow \\ &\left(\frac{1 + \sin x}{1 - \eta\mu^2 x} + \frac{1 - \sin x}{1 - \eta\mu^2 x} \right) \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \eta\mu^2 x} - \frac{1 - \sin x}{1 - \eta\mu^2 x} \right) > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\sin^2 x} \cdot \frac{2\sin x}{\sin^2 x} > 0 \Leftrightarrow \\ &\frac{4}{\sin^3 x} > 0 \Leftrightarrow \sin^3 x > 0 \Leftrightarrow \sin x > 0 \end{aligned}$$

Η τελευταία είναι αληθής στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ επομένως, λόγω των ισοδυναμιών αληθεύει και η αρχική.

β' τρόπος

$$\begin{aligned} g^2(x) &= \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \eta\mu^2 x} \right)^2 = \frac{(1 + \sin x)^2}{(\sin^2 x)^2} = \frac{1 + 2\sin x + \sin^2 x}{\sin^4 x} \\ f^2(x) &= \left(\frac{1 - \sin x}{1 - \eta\mu^2 x} \right)^2 = \frac{(1 - \sin x)^2}{(\sin^2 x)^2} = \frac{1 - 2\sin x + \sin^2 x}{\sin^4 x} \\ g^2(x) - f^2(x) &= \frac{1 + 2\sin x + \sin^2 x}{\sin^4 x} - \frac{1 - 2\sin x + \sin^2 x}{\sin^4 x} = \frac{4}{\sin^3 x} \end{aligned}$$

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2022**
Α΄ ΦΑΣΗ**E_3.Μλ2ΓΑ(α)**

Για $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι

$\sin x > 0$ άρα και $\sin^3 x > 0$ επομένως $\frac{4}{\sin^3 x} > 0$. Έτσι έχουμε τελικά

$$g^2(x) - f^2(x) > 0 \Leftrightarrow g^2(x) > f^2(x)$$

ΟΡΟΣΗΜΟ
ΗΡΑΚΛΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ