

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2023**
Α΄ ΦΑΣΗ**E_3.Γλ1Α(α)****ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ****ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ****Ημερομηνία: Σάββατο 21 Ιανουαρίου 2023****Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες****ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ****ΘΕΜΑ Α****A1.** Σελίδα 68 σχολικού βιβλίου**A2 α)** Σωστό**β)** Λάθος**γ)** Σωστό**δ)** Λάθος**ε)** Σωστό**ΘΕΜΑ Β****B1.** Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΕΒΔ$

- $\hat{B}ΔΑ = \hat{B}ΔΕ = 90^\circ$
- $ΑΔ = ΔΕ$ (υπόθεση)
- $ΒΔ$ (κοινή πλευρά)

Από το κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων (δύο ομόλογες πλευρές ίσες)
τα τρίγωνα είναι ίσα.

B2. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΑΒΜ$ και $ΖΓΜ$

- $ΒΜ = ΜΓ$ ($ΑΜ$ διάμεσος)
- $ΑΜ = ΜΖ$ (υπόθεση)
- $\hat{Α}ΜΒ = \hat{Γ}ΜΖ$ (ως κατακορυφήν γωνίες)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

- B3.** Από την σύγκριση στο ερώτημα B1 έχουμε ότι $AB = BE$ (1)
Από την σύγκριση στο ερώτημα B2 έχουμε ότι $AB = ΓΖ$ (2)
Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $BE = ΓΖ$

ΘΕΜΑ Γ

- Γ1.** Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΓΒΕ$

- $AB = ΒΓ$ (υπόθεση)
- $ΑΔ = ΓΕ$ (υπόθεση)
- $ΒΔ = ΒΕ$ (υπόθεση)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

- Γ2.** Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΑΔΓ$ και $ΑΕΓ$

- $ΑΔ = ΓΕ$ (υπόθεση)
- $Δ\hat{A}Γ = Ε\hat{Γ}Α$ (από την 1^η σύγκριση)
- $ΑΓ$ (κοινή πλευρά)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

- Γ3.**

1^{ος} Τρόπος

Αρκεί να δείξουμε ότι $Μ\hat{A}Γ = Μ\hat{Γ}Α$ το οποίο ισχύει από το συμπέρασμα του ερωτήματος Γ2.

2^{ος} Τρόπος

Αρκεί να δείξουμε ότι: $ΑΜ = ΜΓ$

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΔΑΜ$ και $ΕΓΜ$

- $ΑΔ = ΓΕ$ (υπόθεση)
- $Α\hat{Δ}Μ = Γ\hat{Ε}Μ$ (από το συμπέρασμα του ερωτήματος Γ2)

$$\begin{aligned} & \bullet \quad \Delta\hat{A}Μ = Ε\hat{Γ}Μ \text{ (ως διαφορά ίσων γωνιών)} \quad \begin{array}{l} \Delta\hat{A}Γ = Ε\hat{Γ}Α \\ - \quad Μ\hat{A}Γ = Μ\hat{Γ}Α \\ \hline \Delta\hat{A}Μ = Ε\hat{Γ}Μ \end{array} \end{aligned}$$

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε $AM = MG$ συνεπώς το τρίγωνο AMG είναι ισοσκελές.

Γ4. Η γωνία $\Delta\hat{A}x'$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΔAG , άρα θα ισχύει:

$\Delta\hat{A}x' > \Delta\hat{G}A = M\hat{G}A$. Όμως αποδείξαμε ότι το τρίγωνο AMG είναι ισοσκελές οπότε $M\hat{G}A = M\hat{A}G$, άρα $\Delta\hat{A}x' > M\hat{A}G$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε P εξωτερικό σημείο του κύκλου (Λ, ρ) άρα $PA = PB$ ως εφαπτόμενα τμήματα.

Έχουμε P εξωτερικό σημείο του κύκλου (K, R) άρα $PG = PD$ ως εφαπτόμενα τμήματα.

Οπότε: $PG = PD$

– $PA = PB$

—————
 $AG = BD$

Δ2.

1^{ος} Τρόπος

Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα KAG και $KB\Delta$

- $K\hat{G}A = K\hat{\Delta}B = 90^\circ$
- $AG = B\Delta$ (από Δ1 ερώτημα)
- $KG = K\Delta$ (ως ακτίνες)

Από το κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων (δύο ομόλογες πλευρές ίσες) τα τρίγωνα είναι ίσα συνεπώς $KA = KB$ οπότε το τρίγωνο KAB είναι ισοσκελές.

2^{ος} Τρόπος

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ALK και $B\Lambda K$

- $AL = B\Lambda$ (ως ακτίνες)
- $A\hat{L}K = B\hat{\Lambda}K$ (ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $A\hat{L}P$ και $B\hat{\Lambda}P$)
(έχουμε $A\hat{L}P = B\hat{\Lambda}P$ διότι η PL είναι διακεντρική ευθεία)
- KL (κοινή πλευρά)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα συνεπώς $KA = KB$

οπότε το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισοσκελές.

3^{ος} Τρόπος

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΚΑΡ και ΚΒΡ

- $ΡΑ = ΡΒ$ (ως εφαπτόμενα τμήματα)
- $ΑΡΚ = ΒΡΚ$ (η ΚΡ είναι διακεντρική ευθεία)
- ΚΡ (κοινή πλευρά)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα συνεπώς $ΚΑ = ΚΒ$
οπότε το τρίγωνο ΚΑΒ είναι ισοσκελές.

Δ3. i) Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΚΑΛ έχουμε

$$ΚΑ < ΚΛ + ΛΑ \Leftrightarrow$$

$$ΚΑ < (R + \rho) + \rho \Leftrightarrow$$

$$ΚΑ < R + 2\rho \Leftrightarrow$$

$$ΚΑ < 2\rho + 2\rho \Leftrightarrow$$

$$ΚΑ < 4\rho$$

ii) Έχουμε $\Pi = ΚΑ + ΚΒ + ΑΒ$

από Δ3 i) ερώτημα έχουμε ότι $ΚΑ < 4\rho$

από Δ2 ερώτημα έχουμε ότι $ΚΑ = ΚΒ$ άρα $ΚΒ < 4\rho$

Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΑΛΒ έχουμε

$$ΑΒ < ΛΑ + ΛΒ \Leftrightarrow$$

$$ΑΒ < \rho + \rho \Leftrightarrow$$

$$ΑΒ < 2\rho$$

Άρα $ΚΑ < 4\rho$

$$ΚΒ < 4\rho$$

$$+ ΑΒ < 2\rho$$

$$\underline{ΚΑ + ΚΒ + ΑΒ < 4\rho + 4\rho + 2\rho \Leftrightarrow}$$

$$\Pi < 10\rho$$