Μαθηματικά (Άλγεβρα)

03-06-2022

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδες 30 σχολικού βιβλίου.

Α2. Σελίδα 22 σχολικού βιβλίου.

Α3. **α.** Λάθος

β. Σωστό

γ. Σωστό

δ. Λάθος

ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $f'(x)=\left(2x^3+\alpha x^2-12x+10\right)'=6x^2+2\alpha x-12,\ x\in\mathbb{R}.$

Β2. Η κλίση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0=1$ είναι:

$$f'(1)=6\cdot 1^2+2\cdot\alpha\cdot 1-12=6+2\alpha-12=2\alpha-6$$

Για να είναι η εφαπτομένη της C_f παράλληλη στον άξονα x′x αρκεί να έχει κλίση 0, οπότε:

$$f'(1)=0\Leftrightarrow 2\alpha-6=0\Leftrightarrow 2\alpha=6\Leftrightarrow \alpha=3$$

Β3. Είναι:

- $f(x)=2x^3+3x^2-12x+10,\ x\in\mathbb{R}$ και
- $f'(x)=6x^2+6x-12,\ x\in\mathbb{R}.$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 6x^2+6x-12=0\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-2$$

Αφού η f' είναι πολυωνυμική 2ου βαθμού με συντελεστή δευτεροβάθμιου όρου το $6x^2$, προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$f(-2)=30$	↘	$f(1)=3$	↗	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-2]$ και $[1,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-2,1]$.

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=-2$ το:

$$f(-2)=2\cdot(-2)^3+3\cdot(-2)^2-12\cdot(-2)+10=2\cdot(-8)+3\cdot4+24+10$$
$$=-16+12+24+10=30$$

και τοπικό ελάχιστο για $x=1$ το:

$$f(1)=2\cdot1^3+3\cdot1^2-12\cdot1+10=2+3-12+10=3$$

Β4. Είναι:

$$\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{6x^2+6x-12}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{6(x^2+x-2)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{6(x+2)(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}[6(x+2)]=6\cdot(1+2)=6\cdot3=18$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το μέγεθος του δείγματος είναι $\nu=20+15+\nu_3+5=40+\nu_3$.

Είναι $x_3=\frac{16+20}{2}=18$ και $x_4=\frac{20+24}{2}=22$.

Η μέση τιμή θα είναι:

$$\bar{x}=\frac{x_1\nu_1+x_2\nu_2+x_3\nu_3+x_4\nu_4}{\nu}=\frac{200+210+18\nu_3+22\cdot5}{40+\nu_3}=\frac{520+18\nu_3}{40+\nu_3}$$

Όμως $\bar{x}=14$, οπότε:

$$\frac{520+18\nu_3}{40+\nu_3}=14\Leftrightarrow$$
$$520+18\nu_3=14\cdot(40+\nu_3)\Leftrightarrow$$
$$520+18\nu_3=560+14\nu_3\Leftrightarrow$$
$$18\nu_3-14\nu_3=560-520\Leftrightarrow$$
$$4\nu_3=40\Leftrightarrow$$
$$\nu_3=10$$

Γ2. Ο πίνακας γίνεται:

Κλάσεις [,)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα ν_i	$x_i\nu_i$
$[8,12)$	10	20	200
$[12,16)$	14	15	210
$[16,20)$	18	10	180
$[20,24)$	22	5	110
	Σύνολο	50	700

Γ3.

Κλάσεις $[\ ,\ )$	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα v_i	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$(x_i-\bar{x})^2 v_i$
$[8,12)$	10	20	–4	16	320
$[12,16)$	14	15	0	0	0
$[16,20)$	18	10	4	16	160
$[20,24)$	22	5	8	64	320
	Σύνολο	50			800

Είναι:

$$s^2=\frac{1}{v}\cdot\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2 v_i=\frac{800}{50}=16$$

Είναι:

$$CV=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{16}}{14}=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}>\frac{1}{7}>\frac{1}{10}=0{,}1$$

Επομένως είναι $CV>0{,}1=10\%$, οπότε το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη για $x\neq 0$, με:

$$f(x)=\left(-\frac{1}{x^2}\right)'=\left(-x^{-2}\right)'=2x^{-3}=\frac{2}{x^3}$$

- Για $x<0$ είναι $f'(x)=\frac{2}{x^3}<0$ επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$.
- Για $x>0$ είναι $f'(x)=\frac{2}{x^3}>0$ επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Δ2. Αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$, θα έχουμε:

$$-4\le x\le -1\Rightarrow f(-4)\ge f(x)\ge f(-1)\Rightarrow -\frac{1}{(-4)^2}\ge f(x)\ge -\frac{1}{(-1)^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{16}\ge f(x)\ge -1$$

Άρα $-1\le f(x)\le -\frac{1}{16}$.

Δ3. Η εφαπτομένη της C_f στο $M(1,f(1))$ είναι της μορφής:

$$\varepsilon: y=\lambda x+\beta,$$

οπου $\lambda=f'(1)=\frac{2}{1^3}=2$, άρα $\varepsilon: y=2x+\beta$.

Επίσης $f(1) = -\frac{1}{1^3}$ και

$$M \in (\varepsilon) \Leftrightarrow f(1) = 2 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow -1 = 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = -3$$

Επομένως $\varepsilon : y = 2x - 3$.

Δ4. Αφού τα σημεία $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$, είναι σημεία της ευθείας $y = 2x - 3$, θα είναι:

$$y_i = 2x_i - 3,\ i = 1,2,3.$$

Από εφαρμογή του σχολικού προκύπτει ότι η μέση τιμή των y_i είναι:

$$\overline{y} = 2\overline{x} - 3 = 2 \cdot 4 - 3 = 8 - 3 = 5$$

και η τυπική τους απόκλιση:

$$s_y = |2| s_x = 2 \cdot 2 = 4$$

Οπότε $CV = \frac{s_y}{\overline{y}} = \frac{4}{5} = 0{,}8 = 80\%$.