

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2022**
Β' ΦΑΣΗ**E_3.Γλ1Α(α)****ΤΑΞΗ: Α' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ****ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ****Ημερομηνία: Σάββατο 14 Μαΐου 2022****Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες****ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ****ΘΕΜΑ Α****A1.** Σελίδα 68 σχολικού βιβλίου**A2. α)** Λάθος**β)** Σωστό**γ)** Λάθος**δ)** Σωστό**ε)** Σωστό**ΘΕΜΑ Β****B1.**Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΔΒ$ και $Α'Δ'Β'$

- $\hat{A}\hat{D}B = \hat{A}'\hat{D}'B' = 90^\circ$
- $AD = A'D'$ (υπόθεση)
- $AB = A'B'$ (υπόθεση)

Από το κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων (δύο ομόλογες πλευρές ίσες) τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε $\hat{B} = \hat{B}'$

B2.

Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$

- $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{B}'\hat{A}'\hat{\Gamma}' = 90^\circ$
- $AB = A'B'$ (υπόθεση)
- $\hat{B} = \hat{B}'$ (από την 1^η σύγκριση)

Από το κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων (μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία) τα τρίγωνα είναι ίσα.

ΘΕΜΑ Γ**Γ1.**

Επειδή Ax εξωτερική διχοτόμος ισχύει ότι $\gamma\hat{A}x = x\hat{A}\hat{\Gamma}$

Επειδή $Ax \parallel B\Gamma$ έχουμε $\gamma\hat{A}x = \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ ως εντός'εκτός και επί ταύτα.

ακόμα $x\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B}$ ως εντός εναλλάξ.

Επειδή $\gamma\hat{A}x = x\hat{A}\hat{\Gamma}$ έχουμε $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B}$ άρα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Γ2.

Στο τετράπλευρο $A\Delta\Gamma B$ οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες συνεπώς είναι παραλληλόγραμμο άρα $A\Delta = B\Gamma$

Ακόμα στο τετράπλευρο $ZA\Gamma B$ οι διαγώνιες διχοτομούνται συνεπώς είναι παραλληλόγραμμο άρα $ZA = B\Gamma$

Οπότε $A\Delta = AZ$

Γ3.

Έχουμε $A\Delta \parallel B\Gamma$ διότι $A\Delta\Gamma B$ παραλληλόγραμμο.

Έχουμε $AZ \parallel B\Gamma$ διότι $ZA\Gamma B$ παραλληλόγραμμο.

Άρα $A\Delta \parallel AZ$ από όπου προκύπτει ότι τα σημεία Z , A και Δ είναι συνευθειακά. (Ευκλείδειο αίτημα)

Γ4.

Έχουμε $Z\Delta // B\Gamma$ από προηγούμενο ερώτημα οπότε το τετράπλευρο $Z\Delta\Gamma B$ είναι τραπέζιο.

Έχουμε $ZB = A\Gamma$ διότι $Z\Delta\Gamma B$ παραλληλόγραμμο.

Έχουμε $\Delta\Gamma = AB$ διότι $A\Delta\Gamma B$ παραλληλόγραμμο.

Ακόμα $AB = A\Gamma$ διότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Άρα $ZB = \Delta\Gamma$ δηλαδή οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες, συνεπώς $Z\Delta\Gamma B$ ισοσκελές τραπέζιο.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta M$ έχουμε ότι $\hat{\Delta A M} = 30^\circ$ και $\hat{A M \Delta} = 90^\circ$ άρα $\hat{A \Delta M} = 60^\circ$.

Η $B\Delta$ ως διαγώνιος του ρόμβου $AB\Gamma\Delta$ διχοτομεί την γωνία $\hat{A \Delta M}$ συνεπώς $\hat{\Theta \Delta M} = 30^\circ$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Theta\Delta M$ η γωνία $\hat{\Theta \Delta M} = 30^\circ$ άρα $\Theta M = \frac{\Theta \Delta}{2}$.

Δ2.

Το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο άρα $B\Delta$ και $A\Gamma$ διχοτομούνται

Το $A\Delta\Gamma M$ είναι ορθογώνιο άρα ΔM και $A\Gamma$ διχοτομούνται

άρα οι διαγώνιες $A\Gamma$, ΔB και ΔM συντρέχουν.

Δ3.

Το τρίγωνο $A\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές με την γωνία $\hat{A \Delta \Gamma} = 60^\circ$ άρα είναι ισόπλευρο.

Συνεπώς AM και ΔO διάμεσοι οπότε το Θ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου.

Άρα έχουμε $\Delta\Theta = \frac{2}{3}\Delta O$ και $\Theta O = \frac{1}{3}\Delta O$

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με την γωνία $\hat{A B \Gamma} = 60^\circ$ άρα είναι ισόπλευρο.

Συνεπώς ΓΛ και ΒΟ διάμεσοι οπότε το Κ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου.

$$\text{Άρα έχουμε } BK = \frac{2}{3}BO \text{ και } KO = \frac{1}{3}BO$$

Όμως ΔΟ = ΒΟ, οπότε έχουμε

$$\Delta\Theta = \frac{2}{3}\Delta O$$

$$\Theta K = \Theta O + OK = \frac{1}{3}\Delta O + \frac{1}{3}\Delta O = \frac{2}{3}\Delta O$$

$$BK = \frac{2}{3}\Delta O$$

Συνεπώς ισχύει $\Delta\Theta = \Theta K = KB$

Δ4.

Το τρίγωνο ΑΚΒ είναι ισοσκελές διότι η ΚΛ είναι ύψος και διάμεσος συνεπώς

$$AK = KB \text{ όμως } BK = \frac{1}{3}\Delta B \text{ διότι } \Delta\Theta = \Theta K = KB$$

$$\text{Άρα } AK = \frac{1}{3}\Delta B$$

Εναλλακτικά

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΘΑΒ η ΑΚ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, συνεπώς

$$AK = \frac{1}{2}B\Theta = AK = \frac{1}{2}B\Theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\Delta B = \frac{1}{3}\Delta B$$