

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2022**
Α΄ ΦΑΣΗ**E_3.Γλ1Α(α)****ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ****ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ****Ημερομηνία: Σάββατο 22 Ιανουαρίου 2022****Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες****ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ****ΘΕΜΑ Α****A1.** Σελίδα 42 σχολικού βιβλίου**A2. α)** Λ

β) Σ

γ) Σ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β**B1.** Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΒΔΕ$

- $\hat{A}B = \hat{B}E = 90^\circ$
- $ΑΔ = ΔΕ$ (υπόθεση)
- $ΒΔ$ (κοινή πλευρά)

Από το κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων (δύο ομόλογες πλευρές ίσες)
τα τρίγωνα είναι ίσα.

B2. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΒΕΓ$

- $ΑΒ = ΒΕ$ (από την 1^η σύγκριση)
- $\hat{A}BΓ = \hat{E}BΓ$ (από την 1^η σύγκριση)
- $ΒΓ$ (κοινή πλευρά)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

B3. Επειδή τα σημεία Β και Γ ισαπέχουν από τα σημεία Α και Ε, η ΒΓ είναι μεσοκάθετος της πλευράς ΑΕ.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε $AB = AG \Leftrightarrow$

$$A\Delta + \Delta B = AE + E\Gamma \Leftrightarrow$$

$$A\Delta + 3A\Delta = AE + 3AE \Leftrightarrow$$

$$4A\Delta = 4AE \Leftrightarrow$$

$$A\Delta = AE$$

Γ2. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΚΔ και ΑΚΕ

- $A\Delta = AE$ (από το 1^ο ερώτημα)
- $\hat{\Delta}AK = \hat{E}AK$ (η ΑΜ ως ύψος στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ είναι και διχοτόμος)
- ΑΚ (κοινή πλευρά)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε $\Delta K = KE$

Γ3. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΖΚΜ και ΗΚΜ

- $\hat{K}\hat{M}Z = \hat{K}\hat{M}H = 90^\circ$
- $\hat{Z}\hat{K}M = \hat{H}\hat{K}M$ (ως κατακορυφήν των ίσων γωνιών $\hat{E}\hat{K}A$ και $\hat{\Delta}\hat{K}A$)
- ΚΜ (κοινή πλευρά)

Από το κριτήριο ισότητας ορθογώνιων τριγώνων (μία πλευρά και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία) τα τρίγωνα είναι ίσα επομένως $KZ = KH$ άρα το τρίγωνο ΚΖΗ είναι ισοσκελές.

Γ4. Η ΑΜ ως ύψος στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ είναι και και διάμεσος συνεπώς ισχύει $MB = MG$.

Ακόμα επειδή τα τρίγωνα ΖΚΜ και ΗΚΜ είναι ίσα ισχύει $MZ = MH$

Άρα $MB = MG$

$$\begin{array}{r} MZ = MH \quad - \\ \hline BZ = HG \end{array}$$

ΘΕΜΑ Α

Δ1. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $AP\Delta$ και BPZ

- $\hat{P}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{P}\hat{B}\hat{Z} = 90^\circ$
- $A\Delta = BZ$ (ως ίσες προεκτάσεις των ακτίνων OA και OB)
- $PA = PB$ (ως εφαπτόμενα τμήματα)

Από το κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων (δύο ομόλογες πλευρές ίσες)
τα τρίγωνα είναι ίσα συνεπώς $\hat{\Delta} = \hat{Z}$

Δ2. Από την προηγούμενη σύγκρισή έχουμε $\hat{\Delta}PA = \hat{Z}PB$

Επίσης γνωρίζουμε ότι $\hat{A}PO = \hat{B}PO$ διότι η OP είναι διακεντρική ευθεία.

Άρα $\hat{\Delta}PA = \hat{Z}PB$

$$\frac{\hat{A}PO = \hat{B}PO +}{\hat{\Delta}PO = \hat{Z}PO}$$

Άρα η OP διχοτομεί την γωνία $\hat{\Delta}PZ$

Δ3. Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο AOB έχουμε

$$AB < AO + OB \Leftrightarrow$$

$$AB < OB + BZ \Leftrightarrow$$

$$AB < OZ$$

Δ4. Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΔOP έχουμε

$$\Delta O < \Delta P + PO$$

Όμως στο τρίγωνο ΔPO η PA είναι ύψος και διάμεσος συνεπώς είναι
ισοσκελές άρα $\Delta P = PO$ οπότε:

$$\Delta O < PO + PO \Leftrightarrow$$

$$\Delta O < 2PO \Leftrightarrow$$

επίσης στο τρίγωνο OPZ η PB είναι ύψος και διάμεσος συνεπώς είναι και
αυτό ισοσκελές άρα $PO = PZ$ οπότε:

$$\Delta O < 2PZ \quad (1)$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2022
Α΄ ΦΑΣΗ**E_3.Γλ1Α(α)**

Ακόμα από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο OPZ έχουμε

$$OZ < PO + PZ \Leftrightarrow$$

$$OZ < 2PZ \quad (2)$$

Από (1) + (2) έχουμε: $\Delta O + OZ < 4PZ$

Εναλλακτικά έχουμε:

Παρατηρούμε ότι: $\Delta A = AO = OB = BZ = \rho$

Έχουμε $\Delta O + OZ < 4PZ \Leftrightarrow$

$$\Delta A + AO + OB + BZ = 4\Delta P \Leftrightarrow$$

$$\rho + \rho + \rho + \rho < 4\Delta P \Leftrightarrow$$

$$4\rho < 4\Delta P \Leftrightarrow$$

$$\rho < \Delta P \Leftrightarrow$$

$\Delta A < \Delta P$ το οποίο ισχύει διότι στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔAP η ΔP είναι υποτείνουσα και η ΔA κάθετη.