



ΘΕΜΑ Α

- A1.** Σελίδα 186 σχολικού βιβλίου.
A2. Σελίδα 142 σχολικού βιβλίου.
A3. Σελίδα 161 σχολικού βιβλίου.
A4. α. Σωστό
β. Σωστό
γ. Σωστό
δ. Λάθος
ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

- B1.** Είναι

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [0, +\infty) \mid \sqrt{x} \leq 1\} = \{x \in [0, +\infty) \mid x \leq 1\} = [0, 1]$$

$$h(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^4 - 2(\sqrt{x})^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

Άρα $h(x) = (x-1)^2$, $x \in [0, 1]$

- B2.** Είναι $h'(x) = 2(x-1) \leq 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$, άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα άρα και 1-1, δηλαδή αντιστρέφεται. Το πεδίο ορισμού της h^{-1} είναι το σύνολο τιμών της h , οπότε, αφού η h είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής θα είναι

$$D_{h^{-1}} = h([0, 1]) = [h(1), h(0)] = [0, 1]$$

Για $x \in [0, 1]$ και $y \in [0, 1]$ είναι

$$h(x) = y \Leftrightarrow (x-1)^2 = y \Leftrightarrow |x-1| = \sqrt{y} \Leftrightarrow -x+1 = \sqrt{y} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{y},$$

Διότι $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow x-1 \leq 0$.

Άρα $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$.

- B3.i.** Είναι $\phi(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}, & x \in [0, 1) \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$.

Η ϕ είναι συνεχής στο $[0,1)$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων και επιπλέον

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} \phi(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}{(1 - x)(1 + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x}{(1 - x)(1 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1 + \sqrt{x}} = \frac{1}{2} = \phi(1)\end{aligned}$$

Άρα η Φ είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Επίσης είναι $\phi(0) = 1 \neq \frac{1}{2} = \phi(1)$, άρα πληροί τις προϋποθέσεις του ΘΕΤ στο $[0,1]$.

B3.ii. Αφού

$$\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \eta\mu \frac{\pi}{6} < \eta\mu \alpha < \eta\mu \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < \eta\mu \alpha < 1 \Rightarrow \phi(1) < \eta\mu \alpha < \phi(0)$$

Από Θ.Ε.Τ. υπάρχει ένα, τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $\phi(x_0) = \eta\mu \alpha$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $f(x) = \begin{cases} -2x + c_1, & x < -1 \\ x^3 - x + c_2, & x > -1 \end{cases}$

$$O(0,0) \in C_f \Leftrightarrow f(0) = 0 \Leftrightarrow 0^3 - 0 + c_2 = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0$$

$$\text{Άρα, } f(x) = \begin{cases} -2x + c_1, & x < -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$$

Η f είναι συνεχής οπότε: $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (-2x + c_1) = 2 + c_1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^3 - x) = 0$$

$$\text{Άρα } 2 + c_1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = -2 \text{ και } f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (-2x - 2) = 0$$

$$\text{Οπότε, } f(x) = \begin{cases} -2x - 2, & x \leq -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$$

Γ2. Για $x > -1$ είναι $f(x) = x^3 - x$ και $f'(x) = 3x^2 - 1$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \text{ η οποία διέρχεται από το σημείο } (0, -2), \text{ άρα}$$

οι συντεταγμένες του την επαληθεύουν:

$$\begin{aligned} -2 - f(x_0) = f'(x_0)(0 - x_0) &\Leftrightarrow -2 - x_0^3 + x_0 = (3x_0^2 - 1)(-x_0) \\ &\Leftrightarrow -2 - x_0^3 + x_0 = -3x_0^3 + x_0 \\ &\Leftrightarrow 2x_0^3 = 2 \\ &\Leftrightarrow x_0^3 = 1 \\ &\Leftrightarrow x_0 = 1 \end{aligned}$$

Άρα, $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = 2x - 2$

Γ3. Το εμβαδόν του τριγώνου ΜΚΓ είναι:

$$\begin{aligned} (\text{ΜΚΓ}) &= \frac{1}{2} \cdot (\text{ΓΚ}) \cdot (\text{ΜΚ}) \Rightarrow \\ E &= \frac{1}{2}(x-2) \cdot y = \frac{1}{2}(x-2)(2x-2) = x^2 - 3x + 2 \end{aligned}$$

Η συνάρτηση που δίνει το εμβαδόν ως προς το χρόνο t είναι

$$E(t) = x^2(t) - 3x(t) + 2$$

Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού είναι:

$$E'(t) = 2x(t) \cdot x'(t) - 3x'(t)$$

Επομένως για $t = t_0$, ισχύει: $x(t_0) = 3$ και $x'(t_0) = 2$ μονάδες/sec

Επομένως: $E'(t_0) = 2 \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 6$ τετραγωνικές μονάδες/sec.

Γ4. Για $x < -1$ είναι $f(x) = -2x - 2$ και $f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x$

$$\text{Οπότε: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\eta\mu(-2x-2)}{-2x-2} + \frac{-x^3+x}{1-x^3} \right]$$

Για $x < -1$ είναι:

$$\left| \frac{\eta\mu(-2x-2)}{-2x-2} \right| = \frac{|\eta\mu(-2x-2)|}{|-2x-2|} \leq \frac{1}{|-2x-2|} \stackrel{x < -1}{=} \frac{1}{-2x-2}$$

Ισοδύναμα έχουμε:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{-2x-2} \leq \frac{\eta\mu(-2x-2)}{-2x-2} \leq \frac{1}{-2x-2} \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{-2x-2} + \frac{-x^3+x}{1-x^3} \leq \frac{\eta\mu(-2x-2)}{-2x-2} + \frac{-x^3+x}{1-x^3} \leq \frac{1}{-2x-2} + \frac{-x^3+x}{1-x^3} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{-2x-2} + \frac{-x^3+x}{1-x^3} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{-2x-2} \right] + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{-x^3+x}{1-x^3} \right]$$

Επιπλέον,

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{-2x} \right] + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{-x^3}{-x^3} \right] = 0 + 1 = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{-2x-2} + \frac{-x^3+x}{1-x^3} \right] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{-2x-2} \right] + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{-x^3+x}{1-x^3} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{-2x} \right] + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{-x^3}{-x^3} \right] = 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

Από κριτήριο παρεμβολής, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\eta\mu(-2x-2)}{-2x-2} + \frac{-x^3+x}{1-x^3} \right] = 1$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.i. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$.

Είναι $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \overset{x>0}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$, οπότε:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		$f(1) = 1 - \ln 3$	

$$A_1 = f((0,1]) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = [1 - \ln 3, +\infty),$$

διότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [x - \ln(3x)] = +\infty$, αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(3x) \stackrel{u=3x>0}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$.

$$A_2 = f((1, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} (f(1), +\infty) = (1 - \ln 3, +\infty),$$

διότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - \ln(3x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(1 - \frac{\ln(3x)}{x} \right) \right] = +\infty$, αφού

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ και
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x)}{x} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{DLH \ x \rightarrow +\infty} \frac{3}{3x} = 0$.

Ισχύει $e < 3 \Rightarrow 1 < \ln 3 \Rightarrow 1 - \ln 3 < 0$, οπότε $0 \in A_1$ και $0 \in A_2$ και αφού η f σε κάθε ένα από αυτά είναι γνησίως μονότονη προκύπτει ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει

- ακριβώς μία ρίζα $x_1 \in A_1 = (0,1]$ και
- ακριβώς μία ρίζα $x_2 \in A_2 = (1, +\infty)$.

Επιπλέον $f(1) = 1 - \ln 3 \neq 0$, οπότε το 1 δεν είναι ρίζα της εξίσωσης.

Έτσι η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 ώστε $x_1 < 1 < x_2$.

Δ1.ii. Είναι $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x > 0$, άρα η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

- Δ2.** Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, άρα στο (x_1, x_2) διατηρεί σταθερό πρόσημο, διότι είναι το διάστημα μεταξύ των διαδοχικών ριζών της. Αφού $1 \in (x_1, x_2)$ και $f(1) = 1 - \ln 3 < 0$ θα είναι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$.

$$\begin{aligned} E &= \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx = \int_{x_1}^{x_2} [-f(x)] dx = \int_{x_1}^{x_2} (\ln 3x - x) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \ln 3x dx - \int_{x_1}^{x_2} x dx = \int_{x_1}^{x_2} (x)' \cdot \ln 3x dx - \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x_1}^{x_2} = \\ &= [x \ln 3x]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} x (\ln 3x)' dx - \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} = \\ &= x_2 \ln 3x_2 - x_1 \ln 3x_1 - \int_{x_1}^{x_2} x \cdot \frac{1}{x} dx + \frac{x_1^2 - x_2^2}{2} = \\ &= x_2 \ln 3x_2 - x_1 \ln 3x_1 - (x_2 - x_1) + \frac{x_1^2 - x_2^2}{2} \\ &= x_2 \ln 3x_2 - x_1 \ln 3x_1 + x_1 - x_2 + \frac{x_1^2 - x_2^2}{2} \end{aligned}$$

Όμως $f(x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1 - \ln 3x_1 = 0 \Leftrightarrow \ln 3x_1 = x_1$ και

$f(x_2) = 0 \Leftrightarrow x_2 - \ln 3x_2 = 0 \Leftrightarrow \ln 3x_2 = x_2$, οπότε

$$\begin{aligned} E &= x_2^2 - x_1^2 + x_1 - x_2 + \frac{x_1^2 - x_2^2}{2} = \frac{2x_2^2 - x_1^2 + 2x_1 - 2x_2 + x_1^2 - x_2^2}{2} \\ &= \frac{x_2^2 - x_1^2 + 2x_1 - 2x_2}{2} = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - 2(x_2 - x_1)}{2} \\ &= \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2) \end{aligned}$$

- Δ3.** Αρκεί ν.δ.ο. $2 - x_1 \in (x_1, x_2) \Leftrightarrow x_1 < 2 - x_1 < x_2$

Όμως $x_1 < 2 - x_1 \Leftrightarrow x_1 < 1$ ισχύει

Επίσης $2 - x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 > 2$ που επίσης ισχύει

αφού $E > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2) > 0 \stackrel{x_2 - x_1 > 0}{\Leftrightarrow} x_1 + x_2 - 2 > 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 > 2$

Άρα $f(2 - x_1) < 0$

- Δ4.** Η εξίσωση γράφεται

$$\begin{aligned} 2f(x) - f(1) - f'(x_2)(x - x_2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (f(x) - f(1)) + (f(x) - f'(x_2)(x - x_2)) &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Όμως $f(x) - f(1) \geq 0$ αφού $f(1)$ ολικό ελάχιστο με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$

Επίσης η f κυρτή και η εφαπτομένη της στο x_2 είναι

$$y = f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2) \stackrel{f(x_2)=0}{\Leftrightarrow} y = f'(x_2)(x - x_2)$$

Άρα $f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow f(x) - f'(x_2)(x - x_2) \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = x_2$

Άρα η (1) είναι άθροισμα μη μηδενικών όρων οι οποίοι μηδενίζονται σε διαφορετικές τιμές του x , οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη.



ΟΡΟΣΗΜΟ