

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2021**
Α' ΦΑΣΗ**E_3.ΜΕλ3Γ(α)****ΤΑΞΗ: 3^η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.****ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ****Ημερομηνία: Τετάρτη 5 Μαΐου 2021****Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες****ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ****ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Σελίδα 11
A2. Σελίδα 59-60
A3. Σελίδα 31 (πρώτη απόδειξη)
A4. Λ Σ Σ Σ
A5. $\alpha \rightarrow 3$ $\beta \rightarrow 2$ $\gamma \rightarrow 5$ $\delta \rightarrow 1$ $\epsilon \rightarrow 4$

ΘΕΜΑ Β

- B1.** Το πίνακάκι με τις κλάσεις είναι το παρακάτω:

ΚΛΑΣΕΙΣ	πλάτος
$[20 - \dots)$	c
$[\dots - \dots)$	c
$[\dots - \dots)$	c
$[\dots - \dots)$	c
$[40 - \dots)$	
$[\dots - \dots)$	
ΣΥΝΟΛΟ	

$$\text{Ισχύει: } 40 - 20 = 4 \cdot c \Leftrightarrow 20 = 4c \Leftrightarrow c = 5$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2021

Α' ΦΑΣΗ

Ε_3.ΜΕΛ3Γ(α)

B2.

ΚΛΑΣΕΙΣ	x_i	v_i	N_i	f_i	$F_i \%$
[20 – 25)	45/2	8	8	0,16	16
[25 – 30)	55/2	9	17	0,18	34
[30 – 35)	65/2	15	32	0,3	64
[35 – 40)	75/2	10	42	0,2	84
[40 – 45)	85/2	5	47	0,1	94
[45 – 50)	95/2	3	50	0,06	100
ΣΥΝΟΛΟ		50		1,00	

$$x_1 = \frac{20 + 25}{2} = \frac{45}{2}, \quad x_2 = \frac{25 + 30}{2} = \frac{55}{2}, \quad x_3 = \frac{30 + 35}{2} = \frac{65}{2}, \quad x_4 = \frac{35 + 40}{2} = \frac{75}{2},$$

$$x_5 = \frac{40 + 45}{2} = \frac{85}{2}, \quad x_6 = \frac{45 + 50}{2} = \frac{95}{2},$$

$$N_1 = v_1 = 8$$

Το $f_1 = \frac{v_1}{v_{\text{ολ}}} = \frac{8}{50} = \frac{16}{100} = 0,16$ και $f_1 \% = 0,16 \cdot 100 = 16$ άρα και $F_1 \% = f_1 \% = 16$

Αφού $F_2 \% = 34 \Leftrightarrow F_2 = 0,34$, επίσης $f_1 + f_2 = F_2 \Leftrightarrow f_1 + f_2 = 0,34 \Leftrightarrow 0,16 + f_2 = 0,34 \Leftrightarrow f_2 = 0,18$

Από $f_2 = \frac{v_2}{v_{\text{ολ}}} \Leftrightarrow 0,18 = \frac{v_2}{50} \Leftrightarrow v_2 = 0,18 \cdot 50 = 9$, οπότε και $N_2 = v_1 + v_2 = 8 + 9 = 17$

Το $N_3 = N_2 + v_3 \Leftrightarrow 32 = 17 + v_3 \Leftrightarrow v_3 = 15$

Το $f_3 = \frac{v_3}{v_{\text{ολ}}} = \frac{15}{50} = \frac{30}{100} = 0,3$ και $f_3 \% = 0,3 \cdot 100 = 30$ και $F_3 \% = F_2 \% + f_3 \% = 34 + 30 = 64$

Από $f_4 = \frac{v_4}{v_{\text{ολ}}} \Leftrightarrow 0,2 = \frac{v_4}{50} \Leftrightarrow v_4 = 0,2 \cdot 50 = 10$, οπότε και το $N_4 = N_3 + v_4 = 32 + 10 = 42$

Το $f_4 \% = 0,2 \cdot 100 = 20$ και $F_4 \% = F_3 \% + f_4 \% = 64 + 20 = 84$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2021

Α' ΦΑΣΗ

Ε_3.ΜΕΛ3Γ(α)

Το $f_5 = \frac{v_5}{v_{ολ}} = \frac{5}{50} = \frac{10}{100} = 0,1$ και $f_5\% = 0,1 \cdot 100 = 10$ οπότε

$F_5\% = F_4\% + f_5\% = 84 + 10 = 94$, επίσης $N_5 = N_4 + v_5 = 42 + 5 = 47$

Το $v_6 = v_{ολ} - N_5 = 50 - 47 = 3$, οπότε το $f_6 = \frac{v_6}{v_{ολ}} = \frac{3}{50} = \frac{6}{100} = 0,06$ και

$f_6\% = 0,06 \cdot 100 = 6$

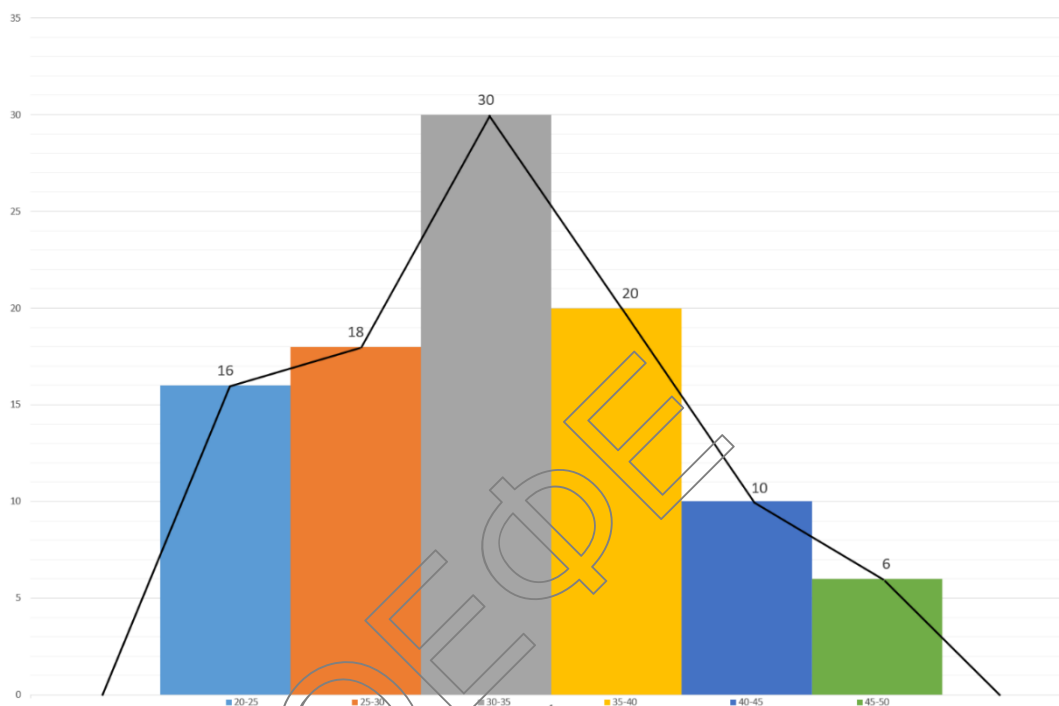
Το $N_6 = v_{ολ} = 50$ και το $f_6\% = 100$

B3. Τουλάχιστον 40 μήνες είναι: $f_5\% + f_6\% = 10\% + 6\% = 16\%$

B4.

ΚΛΑΣΕΙΣ	x_i	v_i	N_i	f_i	$f_i\%$	$F_i\%$
[20 – 25)	45/2	8	8	0,16	16	16
[25 – 30)	55/2	9	17	0,18	18	34
[30 – 35)	65/2	15	32	0,3	30	64
[35 – 40)	75/2	10	42	0,2	20	84
[40 – 45)	85/2	5	47	0,1	10	94
[45 – 50)	95/2	3	50	0,06	6	100
ΣΥΝΟΛΟ		50		1,00	100	

Ιστόγραμμα και πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων %



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Δίνεται $f(x) = x^3 - 6x^2 + ax - \beta$, $x \in \mathbb{R}$

Επομένως $f'(x) = 3x^2 - 12x + a$

Επειδή ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο $x_0 = 2$ είναι ίσος με -3 πρέπει:

$$f'(2) = -3 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + a = -3 \Leftrightarrow 12 - 24 + a = -3 \Leftrightarrow a = 9$$

Επίσης $f(x) = y \Leftrightarrow f(x) = -3x + 4$ για $x=2$ έχουμε

$$f(2) = -3 \cdot 2 + 4 \Leftrightarrow$$

$$2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - \beta = -6 + 4 \Leftrightarrow$$

$$8 - 24 + 18 - \beta = -6 + 4 \Leftrightarrow$$

$$\beta = -6$$

Γ2. Η συνάρτηση γίνεται $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 6$

Βρίσκουμε την παράγωγο $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$3(x^2 - 4x + 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$3(x - 3)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 3 \text{ ή } x = 1$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2021
Α' ΦΑΣΗ

E_3.ΜΕλ3Γ(α)

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
f'	+	-	+	
f	↗	↘	↗	

- Γ3. το $1821, 2021 \in (3, +\infty)$ όπου η f είναι αύξουσα επομένως
 $1821 < 2021 \Leftrightarrow f(1821) < f(2021)$
 το $1,821, 2,021 \in (1,3)$ όπου η f είναι φθίνουσα επομένως
 $1,821 < 2,021 \Leftrightarrow f(1,021) > f(2,021)$

- Γ4. Βρίσκουμε την $f''(x) = 6x - 12$
 $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''	-	+	
f'	↘	↗	

άρα ο ρυθμός μεταβολής γίνεται ελάχιστος για $x=2$, $f'(2) = -3$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2021

Α' ΦΑΣΗ

E_3.ΜΕΛ3Γ(α)

Γ5. Για να είναι συνεχής η g για $x_0=2$ πρέπει $g(2) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$

Υπολογίζω το $g(2) = -6$

και

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{6x-12}{4-\sqrt{x^2+4x+4}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6(x-2)}{(4-\sqrt{(x+2)^2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6(x-2)}{4-(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6(x-2)}{2-x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6(x-2)}{-(x-2)} = -6$$

Επομένως η g είναι συνεχής για $x_0=2$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από την υπόθεση δίνεται

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \alpha x + 1}{x^2 + \beta} = 1$$

Έστω η συνάρτηση $h(x) = \frac{x^2 + \alpha x + 1}{x^2 + \beta}$, $x \in \mathbf{R}$

$$\text{Είναι } h(x) = \frac{x^2 + \alpha x + 1}{x^2 + \beta} \Leftrightarrow x^2 + \alpha x + 1 = h(x)(x^2 + \beta)$$

Από όπου προκύπτει

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + \alpha x + 1) = \lim_{x \rightarrow 0} [h(x)(x^2 + \beta)] \Rightarrow 1 = 1 \cdot \beta \Rightarrow \beta = 1$$

Η ευθεία $y = x + 7$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + \alpha x + 1}{x^2 + 1}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων με παράγωγο

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2 + \alpha x + 1}{x^2 + 1} \right)' = \\ &= \frac{(x^2 + \alpha x + 1)' \cdot (x^2 + 1) - (x^2 + 1)' \cdot (x^2 + \alpha x + 1)}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{(2x + \alpha) \cdot (x^2 + 1) - 2x \cdot (x^2 + \alpha x + 1)}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{\cancel{2x^3} + \cancel{2x} + \alpha x^2 + \alpha - \cancel{2x^3} - 2\alpha x^2 - \cancel{2x}}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{-\alpha x^2 + \alpha}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

Για να είναι η εφαπτομένη κάθετη στην ευθεία στο σημείο $A(0, f(0))$ πρέπει να ισχύει

$$f'(0) \cdot \lambda = -1 \Leftrightarrow \frac{-\alpha \cdot 0^2 + \alpha}{(0^2 + 1)^2} \cdot 1 = -1 \Leftrightarrow +\alpha = -1$$

Άρα τελικά ο τύπος της f γράφεται $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$ και η παράγωγος είναι

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}$$

Δ2. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1$

Δ3. Ο πίνακας μονοτονίας είναι:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f'	+	○	○	+
f	↗	↘	↗	↗

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$, $[1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1, 1]$

Στο $x = -1$ παρουσιάζεται τοπικό μέγιστο με τιμή

$$f(-1) = \frac{(-1)^2 - (-1) + 1}{(-1)^2 + 1} = \frac{1 + 1 + 1}{1 + 1} = \frac{3}{2}$$

Στο 1 παρουσιάζεται τοπικό ελάχιστο με τιμή $f(1) = \frac{1^2 - 1 + 1}{1^2 + 1} = \frac{1}{2}$

Δ4. Τα πεδία ορισμού των δύο συναρτήσεων είναι $A_f = \mathbf{R}$, $A_g = (0, +\infty)$

Το κοινό πεδίο ορισμού είναι $A_{f+g} = (0, +\infty)$

Ο τύπος είναι :

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1} + \frac{-x^3 + 3x^2 - x + 2}{x(x^2 + 1)} = \frac{x^3 - x^2 + x}{x(x^2 + 1)} + \frac{-x^3 + 3x^2 - x + 2}{x(x^2 + 1)} = \\ &= \frac{x^3 - x^2 + x - x^3 + 3x^2 - x + 2}{x(x^2 + 1)} = \frac{2x^2 + 2}{x(x^2 + 1)} = \frac{2(x^2 + 1)}{x(x^2 + 1)} = \frac{2}{x}\end{aligned}$$

και το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο $A_{f+g} = (0, +\infty)$.

Δ5. Το σημείο Σ είναι πάνω στην συνάρτηση $(f+g)(x) = \frac{2}{x}$, η προβολή του στον

άξονα x'x είναι το σημείο A(x,0) και στον άξονα y'y είναι το σημείο B(0, $\frac{2}{x}$)

Οπότε $(OB) = |y_\Sigma| = \frac{2}{|x|} = \frac{2}{x}$, $x > 0$ και $(OA) = x_\Sigma = |x| = x$, $x > 0$

Οπότε η περίμετρος του ορθογωνίου είναι

$$\Pi(x) = 2(OA) + 2(OB) = 2x + 2\frac{2}{x} = 2x + \frac{4}{x}, \quad x > 0$$

Δ6. Η συνάρτηση $\Pi(x) = 2x + \frac{4}{x}$, $x > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο

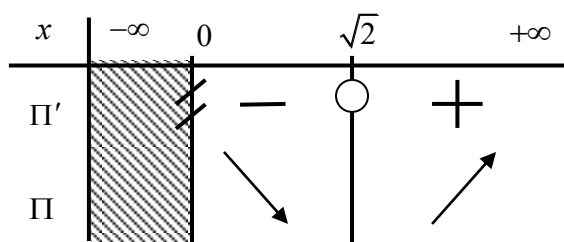
$$\Pi'(x) = 2 - \frac{4}{x^2}$$

Η παράγωγος μηδενίζεται αν:

$$\Pi'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \text{ δεκτή} \quad \text{ή}$$

$$x = -\sqrt{2} \text{ απορ.}$$

Ο πίνακας μονοτονίας της συνάρτησης $\Pi(x)$ είναι:



Οπότε η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = \sqrt{2}$ το:

$$\Pi(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} + \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$\text{Άρα } \Pi(x) \geq \Pi(\sqrt{2}) \Leftrightarrow \Pi(x) \geq 4\sqrt{2}$$

Ο.Ε.Φ.Ε.