ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΑΛΓΕΒΡΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

Ημερομηνία: Μ. Τετάρτη 28 Απριλίου 2021
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. (α) Είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty,-2]$, $[2,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2,2]$

(β) $f(x)=f(-2)\Leftrightarrow f(x)=8$, από το σχήμα προκύπτει ότι $x=4$ και $x=-2$

(γ) Στις θέσεις $x=-2$ και $x=4$ έχει μέγιστο το 8 , ενώ στη θέση $x=2$ έχει ελάχιστο το 0

Α2. (α)

Α3. (δ)

Α4 (α) Λάθος

(β) Λάθος

(γ) Λάθος

(δ) Σωστό

(ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Εφόσον το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x+1$ ο αριθμός -1 θα είναι ρίζα του

δηλαδή : $P(-1)=0 \Leftrightarrow 1-\alpha+\beta+1+2=0 \Leftrightarrow \alpha-\beta=4$ **(1)**

Επίσης το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-2$ είναι 12 οπότε

$P(2)=12 \Leftrightarrow 16+8\alpha+4\beta-2+2=12 \Leftrightarrow 8\alpha+4\beta=-4 \Leftrightarrow 2\alpha+\beta=-1$ **(2)**

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων **(1) ,(2)**

$$\begin{cases} \alpha-\beta=4 \\ 2\alpha+\beta=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-\beta=4 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-(-1-2\alpha)=4 \\ \beta=-1-2\alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+1+2\alpha=4 \\ \beta=-1-2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha=3 \\ \beta=-1-2\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=1 \\ \beta=-3 \end{cases}$$

Άρα $\alpha=1$ και $\beta=-3$ οπότε το πολυώνυμο είναι το
$P(x)=x^4+x^3-3x^2-x+2$

Β2. $P(x)=0$, εφόσον ο αριθμός -1 είναι ρίζα από το σχήμα Horner :

1	1	−3	−1	2	−1
↓	−1	0	3	−2	
1	0	−3	2	0	

ισοδύναμα γράφεται $P(x)=(x+1)(x^3-3x+2)$, το πολυώνυμο x^3-3x+2 έχει ακέραιους συντελεστές οπότε οι πιθανές του ακέραιες ρίζες είναι : $\pm1,\pm2$

Με χρήση του σχήματος Horner έχουμε :

1	0	−3	2	1
↓	1	1	−2	
1	1	−2	0	

$x^3-3x+2=(x-1)(x^2+x-2)$

Τελικά: $P(x)=(x-1)(x+1)(x^2+x-2)$

$$P(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x^2+x-2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \text{ή} \\ x+1=0 \\ \text{ή} \\ x^2+x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \text{ή} \\ x=-1 \\ \text{ή} \\ x=1 \text{ ή } x=-2 \end{cases}$$

Β3. Ζητάμε τις λύσεις της ανίσωσης $P(x)>0$

Επειδή: $P(x)=(x-1)(x+1)(x^2+x-2)$, βρίσκουμε το πρόσημο του κάθε παράγοντα του $P(x)$ ξεχωριστά όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα με το γινόμενό τους να βρίσκετε στην τελευταία γραμμή :

x	$-\infty$ -2	-1	1	$+\infty$
$x-1$	-	-	- 0	+
$x+1$	-	- 0	+	+
x^2+x-2	+ 0	-	- 0	+
$P(x)$	+	-	+	+

Άρα $P(x)>0$ όταν $x\in(-\infty,-2)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

Β4. Στην εξίσωση $\eta\mu^4\theta+\eta\mu^3\theta-3\eta\mu^2\theta-\eta\mu\theta+2=0$

θέτουμε $\eta\mu\theta=x$, $-1\le x\le 1$

άρα γίνεται $x^4+x^3-3x^2-x+2=0 \Leftrightarrow P(x)=0$

η τελευταία εξίσωση έχει λύσεις τους αριθμούς $x=-1$, $x=1$ και $x=2$, η οποία απορρίπτεται λόγω του περιορισμού οπότε :

$$\eta\mu\theta=-1 \overset{\theta\in[0,2\pi]}{\Leftrightarrow} \theta=\frac{3\pi}{2} \text{ και } \eta\mu\theta=1 \overset{\theta\in[0,2\pi]}{\Leftrightarrow} \theta=\frac{\pi}{2}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ισχύει:

$$f(-1)=0 \Leftrightarrow -2-10\eta\mu\omega+4+4\sigma\upsilon\nu^2\omega=0 \Leftrightarrow 2-10\eta\mu\omega+4\left(1-\eta\mu^2\omega\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2-10\eta\mu\omega+4-4\eta\mu^2\omega=0 \Leftrightarrow -4\eta\mu^2\omega-10\eta\mu\omega+6=0$$

Θέτουμε $\eta\mu\omega=y,\ \mu\varepsilon\ -1\le y\le 1$

άρα η τελευταία εξίσωση γίνεται $-4y^2-10y+6=0$, οποία έχει ρίζες τους αριθμούς -3 και $\frac{1}{2}$,από τις οποίες δεκτή είναι μόνο η $y=\frac{1}{2}$

Επομένως : $\eta\mu\omega=\frac{1}{2} \overset{\omega\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)}{\Leftrightarrow} \omega=\frac{5\pi}{6}$

Γ2. Έχουμε $f(x)=2x^3-5x^2-4x+3, x\in\mathbb{R}$

Με τη βοήθεια του σχήματος Horner παραγοντοποιούμε το πολυώνυμο με το $(x+1)$

2	-5	-4	3	-1
$\downarrow$	-2	7	-3	
2	-7	3	0	

$$f(x)=(x+1)\left(2x^2-7x+3\right), x\in\mathbb{R}$$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow (x+1)\left(2x^2-7x+3\right)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+1=0 \\ \acute{\eta} \\ 2x^2-7x+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=-1 \\ \acute{\eta} \\ x=3\ \acute{\eta}\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(-1,0)$, $B\left(\frac{1}{2},0\right)$ και $\Gamma(3,0)$

Επίσης $f(0)=3$, άρα τέμνει και τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\Delta(0,3)$

Γ3. $\frac{f(x)}{2x-1} \le 0 \Leftrightarrow f(x)(2x-1) \le 0 \ , \ 2x-1 \ne 0 \Leftrightarrow x \ne \frac{1}{2}$

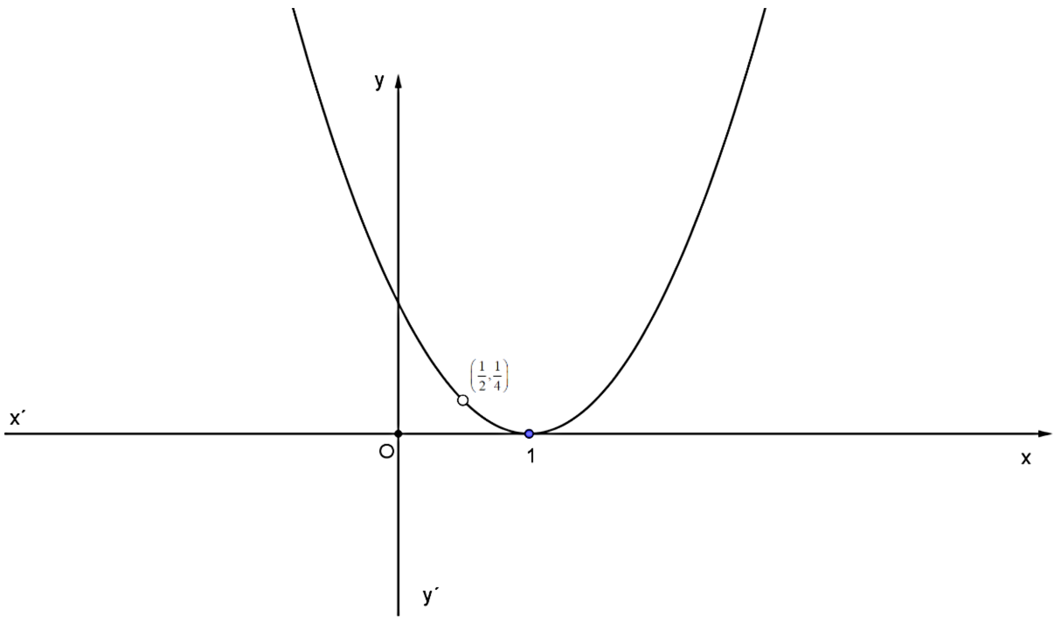
x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$x+1$		-	○	+		+		+	
$2x-1$		-		-	○	+		+	
$2x^2-7x+3$		+		+	○	-	○	+	
$f(x)(2x-1)$		+		-		-		+	

άρα $x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 3\right]$

$g(x) = \frac{f(x)}{2x-1} \Leftrightarrow g(x) = \frac{(x+1)(x-3)(2x-1)}{2x-1} \Leftrightarrow g(x) = x^2 - 2x - 3, \ x \ne \frac{1}{2}$

Έχουμε $h(x) = g(x) + 4 = x^2 - 2x - 3 + 4 \Leftrightarrow h(x) = (x-1)^2, \ x \ne \frac{1}{2}$

Άρα η γραφική παράσταση της h προκύπτει από την παραβολή $y = x^2$ με μία οριζόντια μετατόπιση μία μονάδα προς τα αριστερά με εξαίρεση το σημείο $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$



Γ4. Η ανίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$$2\left(e^{x^2}+2\right)^3-5\left(e^{x^2}+2\right)^2>4e^{x^2}+5 \Leftrightarrow 2\left(e^{x^2}+2\right)^3-5\left(e^{x^2}+2\right)^2-4e^{x^2}-5>0$$

$$2\left(e^{x^2}+2\right)^3-5\left(e^{x^2}+2\right)^2-4e^{x^2}-8+3>0 \Leftrightarrow 2\left(e^{x^2}+2\right)^3-5\left(e^{x^2}+2\right)^2-4\left(e^{x^2}+2\right)+3>0$$

(1)

Το πρώτο μέλος της **(1)** είναι η συνάρτηση f άλλα στην θέση του x έχει αντικατασταθεί το $e^{x^2}+2$

Ισχύει : $f(x)=(x+1)\left(2x^2-7x+3\right) \Leftrightarrow f(x)=(x+1)(x-3)(2x-1)$

Άρα: $\left(e^{x^2}+3\right)\left(2e^{x^2}+3\right)\left(e^{x^2}-1\right)>0$**,** όμως $\left(e^{x^2}+3\right)>0$ και $\left(2e^{x^2}+3\right)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε $e^{x^2}-1>0 \Leftrightarrow e^{x^2}>1 \Leftrightarrow x^2>0 \Leftrightarrow x\neq 0$

Β΄ τρόπος

Στην ανίσωση $2\left(e^{x^2}+2\right)^3-5\left(e^{x^2}+2\right)^2>4e^{x^2}+5$ θέτουμε $e^{x^2}+2=w>0$

$$2w^3-5w^2>4(w-2)+5 \Leftrightarrow 2w^3-5w^2-4w+3>0$$

Άρα $:(w+1)(w-3)(2w-1)>0$ οπότε : $\left(e^{x^2}+3\right)\left(e^{x^2}-1\right)\left(2e^{x^2}+3\right)>0$

όμως $\left(e^{x^2}+3\right)>0$ και $\left(2e^{x^2}+3\right)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε $e^{x^2}-1>0 \Leftrightarrow e^{x^2}>1 \Leftrightarrow x^2>0 \Leftrightarrow x\neq 0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για να ορίζεται η f πρέπει : $2^x-1>0 \Leftrightarrow 2^x>1 \Leftrightarrow 2^x>2^0 \Leftrightarrow \boxed{x>0}$

και $8^x+3\cdot 4^x-4>0$, για την λύση της τελευταίας έχουμε :

$$8^x+3\cdot 4^x-4>0 \Leftrightarrow \left(2^x\right)^3+3\left(2^x\right)^2-4>0\,\mathbf{(1)}$$

Θέτουμε: $2^x=w>0$ άρα η **(1)** γίνεται:

$$w^3+3w^2-4>0 \Leftrightarrow w^3+4w^2-w^2-4>0 \Leftrightarrow w^2(w-1)+4\left(w^2-1\right)>0$$

$$\Leftrightarrow w^2(w-1)+4(w-1)(w+1)>0 \Leftrightarrow (w-1)\left(w^2+4w+4\right)>0 \Leftrightarrow (w-1)(w+2)^2>0$$

Οπότε: $\left(2^x\right)^3+3\left(2^x\right)^2-4>0 \Leftrightarrow \left(2^x-1\right)\left(2^x+2\right)^2>0 \Leftrightarrow 2^x-1>0 \Leftrightarrow \boxed{x>0}$

Άρα το πεδίο ορισμού είναι το $A=(0,+\infty)$

Δ2. Η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(8^x+3\cdot4^x-4\right)-\ln\left(2^x-1\right)-1$ για κάθε $x>0$ ισοδύναμα γίνεται

$$f(x)=\ln\left(8^x+3\cdot4^x-4\right)-\ln\left(2^x-1\right)-1=\ln\left[\left(2^x-1\right)\left(2^x+2\right)^2\right]-\ln\left(2^x-1\right)-1$$

$$=\ln\left[\frac{\left(2^x-1\right)\left(2^x+2\right)^2}{\left(2^x-1\right)}\right]-1=\ln\left(2^x+2\right)^2-1=2\ln\left(2^x+2\right)-1$$

Έστω $x_1,x_2\in A$ με $x_1<x_2$ τότε έχουμε:

$$x_1<x_2 \Leftrightarrow 2^{x_1}<2^{x_2} \Leftrightarrow 2^{x_1}+2<2^{x_2}+2 \Leftrightarrow \ln\left(2^{x_1}+2\right)<\ln\left(2^{x_2}+2\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\ln\left(2^{x_1}+2\right)<2\ln\left(2^{x_2}+2\right) \Leftrightarrow 2\ln\left(2^{x_1}+2\right)-1<2\ln\left(2^{x_2}+2\right)-1 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $A=(0,+\infty)$

Δ3. Για κάθε $x>0$ έχουμε:

$$f(x)\le 2\ln\frac{10}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow 2\ln\left(2^x+2\right)-1\le 2\left(\ln10-\ln\sqrt{e}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\ln\left(2^x+2\right)-1\le 2\ln10-2\ln e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 2\ln\left(2^x+2\right)-1\le 2\ln10-\ln e$$

$$\Leftrightarrow 2\ln\left(2^x+2\right)-1\le 2\ln10-1 \Leftrightarrow 2\ln\left(2^x+2\right)\le 2\ln10 \Leftrightarrow 2^x+2\le10$$

$\Leftrightarrow 2^x\le8 \Leftrightarrow 2^x\le2^3 \Leftrightarrow x\le3$ και επειδή έχουμε ότι $x>0$ τότε $x\in(0,3]$

Δ4. ισχύει ότι : $\eta\mu^2\left(1130^\circ\right)+\eta\mu^2\left(40^0\right)=1$

διότι: $1130^\circ=3\cdot 360^\circ+50^\circ$ άρα $\eta\mu^2\left(1130^\circ\right)=\eta\mu^2\left(50^0\right)=\sigma\upsilon\nu^2\left(40^\circ\right)$

άρα για $x>0$ έχουμε

$f(x)=1 \Leftrightarrow 2\ln\left(2^x+2\right)-1=1 \Leftrightarrow 2\ln\left(2^x+2\right)=2$

$\Leftrightarrow \ln\left(2^x+2\right)=1 \Leftrightarrow 2^x+2=e \Leftrightarrow 2^x=e-2 \Leftrightarrow x=\log_2(e-2)$,απορρίπτεται

διότι : $0<e-2<1 \Leftrightarrow \log_2(e-2)<\log_2 1 \Leftrightarrow \log_2(e-2)<0$