ΤΑΞΗ: **3η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

Ημερομηνία: Πέμπτη 7 Ιανουαρίου 2021
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. **Η παράγωγος της συνάρτησης *cf(x)***

Έστω η συνάρτηση *F(x)=cf(x)*. Έχουμε:

$F(x+h)-F(x)=cf(x+h)-cf(x)=c(f(x+h)-f(x))$ και για $h\neq 0$

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{c(f(x+h)-f(x))}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Επομένως

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{c(f(x+h)-f(x))}{h}\right]=cf'(x)$$

Άρα $(c\cdot f(x))'=c\cdot f(x)$

Α2. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1,x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$

Α3. α)Σ β)Λ γ)Σ δ)Λ ε)Σ

Α4. $\alpha\to 2$, $\beta\to 3$, $\gamma\to 6$, $\delta\to 4$, $\varepsilon\to 1$, $\zeta\to 5$

ΘΕΜΑ Β

Β1. α) Το πεδίο ορισμού είναι: $x \in (-3,-1) \cup (-1,1] \cup (3,4]$

Το Σύνολο τιμών είναι: $\Sigma \mathrm{T} = [0,3]$

β) Οι λύσεις της εξίσωσης είναι: $x=-2$ και $x=0$

Η λύση της ανίσωσης είναι $x \in (-2,-1) \cup (-1,0) \cup (3,4]$

γ) Για $x \in (-3,-1) \cup (3,4]$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.

Για $x \in (-1,1]$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.

Στο $x=1$ το $f(1)=0$, δηλαδή στο σημείο $(1,0)$ έχει ελάχιστο.

Στο $x=4$ το $f(4)=3$, δηλαδή στο σημείο $(4,3)$ έχει μέγιστο.

δ) $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 2, \quad \lim\limits_{x \to -1} f(x) = 3, \quad \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to 3} f(x) = 2$

Β2. α) Θα πρέπει $-x^2+6x+7 \geq 0$.

Η εξίσωση $-x^2+6x+7=0$ έχει

$\Delta = \beta^2 - 4a\gamma = 6^2 - 4\cdot(-1)\cdot 7 = 36+28 = 64$ και λύσεις:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{64}}{2\cdot(-1)} = \begin{cases} \dfrac{-6+8}{-2} = \dfrac{2}{-2} = -1 \\ \dfrac{-6-8}{-2} = \dfrac{-14}{-2} = 7 \end{cases}$$

X	$-\infty$	-1		7	$+\infty$
$-x^2+6x+7$	$-$	0	$+$	0	$-$

Άρα το πεδίο ορισμού είναι: $A_f = [-1,7]$

β) Τομή με τον άξονα y’y: (x=0) $f(0) = \sqrt{-0^2+6\cdot 0+7} = \sqrt{7}$

Άρα το σημείο τομής με τον άξονα y’y είναι το: $(0,\sqrt{7})$.

Τομή με τον άξονα x’x: (y=0) $f(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{-x^2+6x+7}=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -x^2+6x+7=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=7 \end{cases}$$

Άρα τα σημεία τομής με τον άξονα x’x είναι τα: $(-1,0)$ και $(7,0)$

γ) $$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-4}{27-3x^2}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{-x^2+6x+7}-4}{27-3x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{-x^2+6x+7}-4\right)\left(\sqrt{-x^2+6x+7}+4\right)}{3\left(9-x^2\right)\left(\sqrt{-x^2+6x+7}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{-x^2+6x+7}\right)^2-4^2}{3\left(3^2-x^2\right)\left(\sqrt{-x^2+6x+7}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-x^2+6x+7-16}{3\left(3^2-x^2\right)\left(\sqrt{-x^2+6x+7}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-x^2+6x-9}{3(3-x)(3+x)\left(\sqrt{-x^2+6x+7}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-(x-3)(x-3)}{-3(x-3)(3+x)\left(\sqrt{-x^2+6x+7}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-(x-3)}{-3(3+x)\left(\sqrt{-x^2+6x+7}+4\right)}=$$

$$=\frac{-(3-3)}{-3(3+3)\left(\sqrt{-3^2+6\cdot 3+7}+4\right)}=\frac{0}{-18\cdot 8}=0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Πρέπει $1-4x^2 \neq 0 \Leftrightarrow 4x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x^2 \neq \frac{1}{4} \Leftrightarrow x \neq \pm\frac{1}{2}$, άρα $D_f = \Re - \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$

Το σημείο $(-1,0)$ ανήκει στην συνάρτηση άρα την επαληθεύει, οπότε θα ισχύει:

$$f(-1)=0 \Leftrightarrow \frac{-2(-1)^2-(-1)+\alpha}{1-4(-1)^2}=0 \Leftrightarrow \frac{-2\cdot 1+1+\alpha}{1-4}=0 \Leftrightarrow -2+1+\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=1$$

Θα απλοποιήσουμε τον τύπο της συνάρτησης, οπότε παραγοντοποιούμε τους όρους του κλάσματος και έχουμε: $1-4x^2=(1-2x)(1+2x)$ και

$-2x^2-x+1=-2(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)=-(x+1)(2x-1)$ επειδή

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)^2-4\cdot(-2)\cdot 1=1+8=9$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{9}}{2\cdot(-2)}=\frac{1\pm 3}{-4}=\begin{cases}\frac{1+3}{-4}=\frac{4}{-4}=-1\\ \frac{1-3}{-4}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

Η συνάρτηση γίνεται:

$$f(x)=\frac{-2x^2-x+1}{1-4x^2}=\frac{-(x+1)(2x-1)}{(1-2x)(1+2x)}=\frac{(x+1)(1-2x)}{(1-2x)(1+2x)}=\frac{x+1}{1+2x}$$

για κάθε $x \neq \frac{1}{2}$ και $x \neq -\frac{1}{2}$

Γ2. Θα βρούμε την

$$f'(x)=\left(\frac{x+1}{1+2x}\right)'=\frac{(x+1)'(1+2x)-(x+1)\cdot(1+2x)'}{(1+2x)^2}=\frac{1+2x-2(x+1)}{(1+2x)^2}=-\frac{1}{(1+2x)^2}<0,$$

οπότε η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της και δεν έχει ακρότατα.

Γ3. Θα εξετάσουμε αν το σημείο (-2,1) ανήκει στην συνάρτηση $f(x)=\frac{x+1}{1+2x}$.

$f(-2)=\frac{-2+1}{1+2(-2)}=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}\neq 1$, οπότε το σημείο δεν είναι σημείο επαφής.

Έστω x_0 η τετμημένη του σημείου επαφής, τότε η εξίσωση εφαπτομένης θα έχει τύπο: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ και βάζουμε όπου $x=-2$ και $y=1$.

$$1-\frac{x_0+1}{1+2x_0}=-\frac{1}{(1+2x_0)^2}(-2-x_0)\overset{\cdot(1+2x_0)^2}{\Leftrightarrow}(1+2x_0)^2-(1+2x_0)(x_0+1)=-(-2-x_0)\Leftrightarrow$$

$1+4x_0+4x_0^2-x_0-1-2x_0^2-2x_0=2+x_0 \Leftrightarrow 2x_0^2=2 \Leftrightarrow x_0^2=1 \Leftrightarrow x_0=\pm 1$ δηλαδή έχουμε δύο εφαπτομένες που διέρχονται από το σημείο αυτό.

Για $x_0=1$, η εξίσωση εφαπτομένης είναι: $y-f(1)=f'(1)(x-1)$ με

$f(1)=\frac{1+1}{1+2\cdot 1}=\frac{2}{3}$ και $f'(1)=-\frac{1}{(1+2\cdot 1)^2}=-\frac{1}{9}$ άρα $y-\frac{2}{3}=-\frac{1}{9}(x-1)\overset{\cdot 9}{\Leftrightarrow}$

$9y-6=-(x-1)\Leftrightarrow 9y+x-7=0$

Για $x_0=-1$, η εξίσωση εφαπτομένης είναι: $y-f(-1)=f'(-1)(x-(-1))$ με

$f(-1)=\frac{-1+1}{-1+2\cdot(-1)}=0$ και $f'(1)=-\frac{1}{(1+2\cdot(-1))^2}=-\frac{1}{1}=-1$ άρα

$y-0=-(x+1)\Leftrightarrow y=-x-1$

Γ4. $g(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{1+2x}, & x\neq \frac{1}{2}\\ 2x-\beta, & x=\frac{1}{2}\end{cases}$

i) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} g(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{x+1}{1+2x}=\frac{\frac{1}{2}+1}{1+2\frac{1}{2}}=\frac{\frac{3}{2}}{2}=\frac{3}{4}$

$\lim\limits_{x\to 2} g(x)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+1}{1+2x}=\frac{2+1}{1+2\cdot 2}=\frac{3}{5}$

ii) Για $x\neq\frac{1}{2}$ η συνάρτηση g είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων, για να είναι παντού συνεχής θα πρέπει να είναι συνεχής και για $x=\frac{1}{2}$, οπότε θα πρέπει να ισχύει:

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} g(x)=g\left(\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow\frac{3}{4}=2\cdot\frac{1}{2}-\beta\Leftrightarrow\frac{3}{4}=1-\beta\Leftrightarrow\beta=\frac{1}{4}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x)=\left(x^3\right)'+\left(\dfrac{\alpha x^2}{2}\right)'-(36x)'+(10)'=3x^2+\alpha x-36$

$f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\left(3x^2\right)'+(\alpha x)'-(36)'=6x+\alpha$

$f'(1)=3\cdot 1^2+\alpha\cdot 1-36=3+\alpha-36=\alpha-33$

$f''(-1)=6\cdot(-1)+\alpha=-6+\alpha$

$3\cdot f''(-1)+f'(1)=-39\Leftrightarrow 3\cdot(-6+\alpha)+\alpha-33=-39\Leftrightarrow$

$-18+3\alpha+\alpha-33=-39\Leftrightarrow 4\alpha=-39+51\Leftrightarrow \alpha=\dfrac{12}{4}\Leftrightarrow \alpha=3$

Δ2. $f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2+3x-36=0\Leftrightarrow x^2+x-12=0$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1^2-4\cdot 1\cdot(-12)=1+48=49$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{2\cdot 1}=\begin{cases}\dfrac{-1+7}{2}=\dfrac{6}{2}=3\\[2mm] \dfrac{-1-7}{2}=\dfrac{-8}{2}=-4\end{cases}$$

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↗	

Η f(x) είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-4]$. Η f(x) είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-4,3]$. Η f(x) είναι γνησίως αύξουσα στο $[3,+\infty)$.

Δ3. $f''(x)=0\Leftrightarrow 6x+3=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{6}=-\dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		↘	Τ.Ε.	↗	

Η f'(x) παρουσιάζει στο $x_0 = -1/2$ Τοπικό Ελάχιστο (ολικό) με τιμή:

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2+3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-36=\frac{3}{4}-\frac{3}{2}-36=\frac{3-6-144}{4}=-\frac{147}{4}$$

Δ4. Επειδή θέλουμε την εξίσωση της εφαπτομένης της f', θα βρούμε τον συντελεστή διεύθυνσης λ από την $2^η$ παράγωγο της f στο $x_0 = 1$.

$$\lambda = f''(1) = 6\cdot 1+3=9$$

$$y=f'(1)=3\cdot 1^2+3\cdot 1-36=-30$$

$$y=\lambda\cdot x+\beta \Leftrightarrow -30=9\cdot 1+\beta \Leftrightarrow \beta=-39$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y=9\cdot x-39$

Δ5. Οι τιμές $\frac{5}{4}$ και $\frac{5}{7}$ ανήκουν στο διάστημα $[-4,3]$, στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Ισχύει: $\frac{5}{4}>\frac{5}{7} \xrightarrow{\text{Η f γνησίως φθίνουσα}} f\left(\frac{5}{4}\right)<f\left(\frac{5}{7}\right)$

Δ6. Η f'(x) παρουσιάζει στο $x_0 = -1/2$ Τοπικό Ελάχιστο (ολικό) με τιμή: $-\frac{147}{4}$

Από τον ορισμό του Ελαχίστου μιας συνάρτησης, θα έχουμε:

$$f'(x)\geq T.E. \Leftrightarrow f'(x)\geq f'\left(-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow f'(x)\geq -\frac{147}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+3x-36\geq -\frac{147}{4}\Leftrightarrow 3x^2+3x\geq -\frac{147}{4}+36\Leftrightarrow 3\left(x^2+x\right)\geq\frac{-147+144}{4}$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^2+x\right)\geq\frac{-3}{4}\Leftrightarrow x^2+x\geq -\frac{3}{3\cdot 4}\Leftrightarrow x^2+x\geq -\frac{1}{4}$$