ΤΑΞΗ: **Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Σάββατο 9 Ιανουαρίου 2021
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 43 (Ιδιότητες εσωτερικού γινομένου)

Α2. α. Ψευδής

β. Επειδή $\vec{\alpha} \nearrow\swarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$ αφού η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα είναι π.

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 23 (Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων)

Α4. 1.Λάθος,
2.Σωστό,
3.Σωστό,
4.Λάθος,
5.Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Οι συντεταγμένες της κορυφής Α προκύπτουν από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων των δύο ευθειών

$$\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ x - 4y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ -2x + 8y = 4 \end{cases}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει ότι : $9y = 9 \Leftrightarrow y = 1$.

Με αντικατάσταση σε μία από τις δύο αρχικές εξισώσεις προκύπτει ότι x = 2. Άρα **Α(2, 1)**

Β2. Επειδή η εξίσωση της πλευράς ΒΓ είναι παράλληλη στη (ζ) θα ισχύει ότι $\lambda_{B\Gamma} = \lambda_{\zeta} = 3$ και αφού η ΒΓ διέρχεται από το Β έχουμε ότι :

$$y - 4 = 3(x + 2) \Leftrightarrow \boldsymbol{y = 3x + 10}$$

Β3. Αφού $B\Delta \perp A\Gamma \Leftrightarrow \lambda_{B\Delta} \cdot \lambda_{A\Gamma} = -1$ και επειδή $\lambda_{B\Delta} = -1$ προκύπτει ότι

$\lambda_{A\Gamma} = 1$ και αφού η ΑΓ διέρχεται από το Α έχουμε ότι :

$y - 1 = x - 2 \Leftrightarrow y = x - 1$

Οι συντεταγμένες της κορυφής Γ προκύπτουν από τη λύση του

συστήματος των εξισώσεων των ευθειών ΑΓ και ΒΓ

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = 3x + 10 \end{cases}$$

Εξισώνοντας τις δύο σχέσεις προκύπτει $x - 1 = 3x + 10 \Leftrightarrow x = -\frac{11}{2}$.

Με αντικατάσταση σε μία από τις δύο προκύπτει ότι $= -\frac{13}{2}$.

Άρα $\mathbf{\Gamma}(-\frac{11}{2}, -\frac{13}{2})$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Γνωρίζουμε ότι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \sigma\upsilon\nu \left(\widehat{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}\right)$, όπου $0 \leq \left(\widehat{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}\right) \leq \pi$ (1). Απαιτείται να υπολογίσουμε το $\sigma\upsilon\nu \left(\widehat{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}\right)$. Από την γνωστή

τριγωνομετρική ταυτότητα $\sigma\upsilon\nu^2 \left(\widehat{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}\right) + \eta\mu^2 \left(\widehat{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}\right) = 1$, αν αντικαταστήσουμε $\eta\mu\left(\widehat{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}\right)=\frac{3}{5}$, προκύπτει $\sigma\upsilon\nu^2\left(\widehat{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}\right)=\frac{16}{25}$ οπότε, $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}\right)=\frac{4}{5}$ ή $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}\right)=-\frac{4}{5}$. Αντικαθιστούμε στην αρχική σχέση

$|\vec{\alpha}|=1, |\vec{\beta}|=5$ οπότε έχουμε **,** $\boldsymbol{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=4}$ **ή** $\boldsymbol{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-4}$.

Επειδή η $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$ είναι οξεία, το $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}\right)>0$, άρα $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=4$ **.**

Γ2. $\left|5\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2=\left(5\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)^2=25\vec{\alpha}^2-10\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=25-10\cdot 4+25=10.$

Άρα, $\boldsymbol{\left|5\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|=\sqrt{10}}$.

Γ3. Τα διανύσματα $\vec{v}=\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)\vec{\alpha}-x\vec{\beta}=4\vec{\alpha}-x\vec{\beta}$, $\vec{\beta}$ είναι κάθετα επομένως, $\vec{v}\cdot\vec{\beta}=0\Leftrightarrow\left(4\vec{\alpha}-x\vec{\beta}\right)\vec{\beta}=0\Leftrightarrow 4\vec{\alpha}\vec{\beta}-x\vec{\beta}^2=0\Leftrightarrow 4\cdot 4-25x=0\Leftrightarrow$ $16=25x\Leftrightarrow\boldsymbol{x=\frac{16}{25}}$.

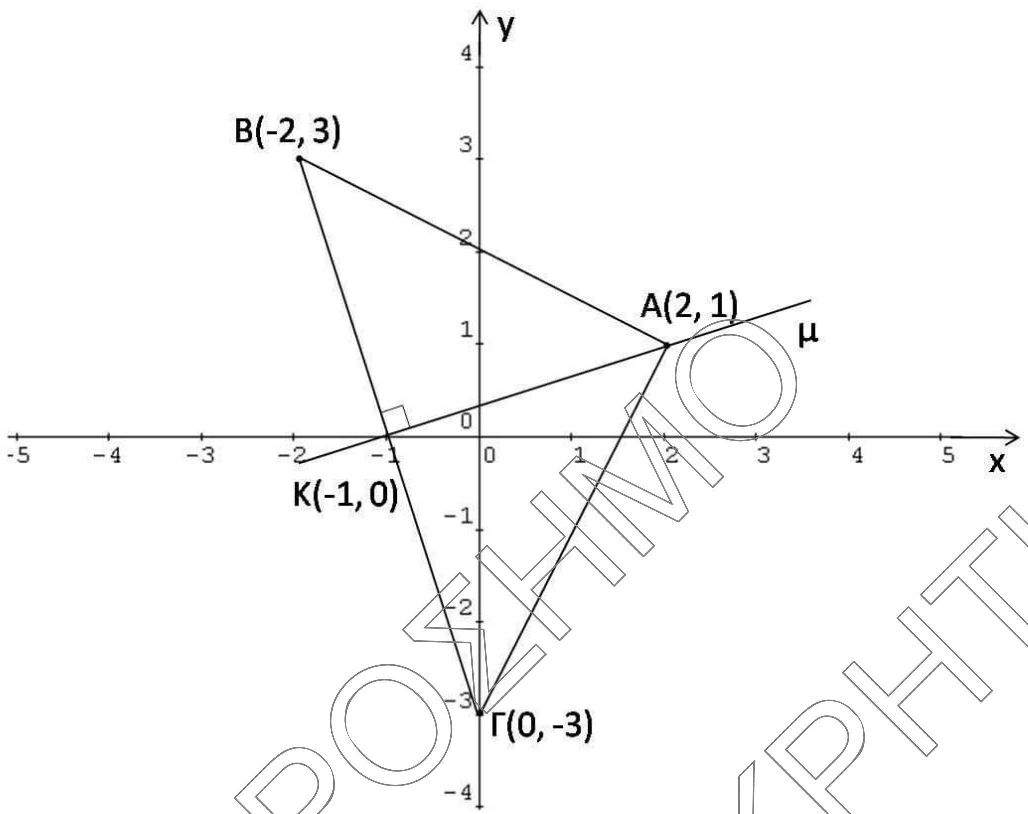
ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Το μέσον Κ του ευθύγραμμος τμήματος ΒΓ είναι Κ $\left(\frac{x_B+x_\Gamma}{2},\frac{y_B+y_\Gamma}{2}\right)$ ή Κ(-1, 0).

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας στην οποία ανήκει η πλευρά ΒΓ είναι : $\lambda_{B\Gamma}=\frac{y_\Gamma-y_B}{x_\Gamma-x_B}=\frac{-3-3}{0-(-2)}=-3.$

Αφού $B\Gamma\perp\mu\Leftrightarrow\lambda_{B\Gamma}\cdot\lambda_\mu=-1\Leftrightarrow\lambda_\mu=\frac{1}{3}$ και αφού η μ διέρχεται

από το Κ έχουμε ότι μ : $y-0=\frac{1}{3}\left(x-(-1)\right)\Leftrightarrow\boldsymbol{y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}$.



Δ2. Αφού το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\hat{A} = 90°$ ισχύει :

- ΑΒ = ΑΓ . Επομένως το Α ισαπέχει από τα σημεία Β και Γ . Άρα βρίσκεται κατ'ανάγκη στη μεσοκάθετη μ του ευθυγράμμου τμήματος ΒΓ . Επομένως οι συντεταγμένες του ικανοποιούν τον τύπο της μ: $y_A = \frac{1}{3}x_A + \frac{1}{3}$. Έτσι είναι $A(x_A\,,\ \frac{1}{3}x_A + \frac{1}{3})$ με $x_A > 0$.

- $\hat{A} = 90° \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 0$ (1)

  Όμως $\overrightarrow{AB} = (-2 - x_A\,, 3 - \frac{1}{3}x_A - \frac{1}{3}) = (-2 - x_A\,, -\frac{1}{3}x_A + \frac{8}{3})$ (2)
  Όμως $\overrightarrow{A\Gamma} = (0 - x_A\,, -3 - \frac{1}{3}x_A - \frac{1}{3}) = (-x_A\,, -\frac{1}{3}x_A - \frac{10}{3})$ (3)

  $(1) \xRightarrow{(2),(3)} (-2 - x_A)(-x_A) + \frac{1}{3}(8 - x_A)(-\frac{1}{3})(10 + x_A) = 0 \Rightarrow$

$$2x_A + x_A^2 - \frac{1}{9}(80 + 8x_A - 10x_A - x_A^2) = 0 \overset{\cdot 9}{\Rightarrow} \; x_A^2 + 2x_A - 8 = 0$$

$$\Rightarrow \; x_A = 2 \text{ ή } x_A = -4$$

Και αφού $x_A > 0$ είναι $x_A = 2$ και $y_A = \frac{1}{3}\,2 + \frac{1}{3} = 1$. Άρα **Α (2, 1)**

Δ3. $\overrightarrow{ΜΒ} \cdot \overrightarrow{ΜΓ} + \overrightarrow{ΜΑ}^2 = \overrightarrow{ΜΑ} \cdot \overrightarrow{ΜΒ} + \overrightarrow{ΜΑ} \cdot \overrightarrow{ΜΓ} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{ΜΒ} \cdot \overrightarrow{ΜΓ} - \overrightarrow{ΜΑ} \cdot \overrightarrow{ΜΓ} = \overrightarrow{ΜΑ} \cdot \overrightarrow{ΜΒ} - \overrightarrow{ΜΑ}^2 \Leftrightarrow$

$\left(\overrightarrow{ΜΒ} - \overrightarrow{ΜΑ}\right) \cdot \overrightarrow{ΜΓ} = \overrightarrow{ΜΑ} \cdot (\overrightarrow{ΜΒ} - \overrightarrow{ΜΑ}) \Leftrightarrow \; \overrightarrow{ΑΒ} \cdot \overrightarrow{ΜΓ} = \overrightarrow{ΜΑ} \cdot \overrightarrow{ΑΒ} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{ΑΒ} \cdot \left(\overrightarrow{ΜΓ} - \overrightarrow{ΜΑ}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{ΑΒ} \cdot \overrightarrow{ΑΓ} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{ΑΒ} \perp \overrightarrow{ΑΓ}}$ που ισχύει από την υπόθεση. Λόγω των ισοδυναμιών , η αλήθεια της τελευταίας σημαίνει και την αλήθεια της αρχικής .