



ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Πέμπτη 7 Ιανουαρίου 2021
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 60

A2.

- α) Λάθος
- β) Σωστό
- γ) Σωστό
- δ) Σωστό
- ε) Λάθος

A3.

- α) Άρτια
- β) Τίποτα
- γ) Περιττή

ΘΕΜΑ Β

$$\text{B1. } \begin{cases} x - \frac{y}{2} = \frac{1}{2} \\ 3x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\text{B2. } \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} \Big| \begin{matrix} (-2) \\ \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 2y = -2 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις και έχουμε:

$$(-4x + 2y) + (3x - 2y) = -2 \Leftrightarrow -x = -2 \Leftrightarrow x = 2$$

Αντικαθιστούμε το $x=2$ στην $2x - y = 1$ και έχουμε:

$$2 \cdot 2 - y = 1 \Leftrightarrow 4 - y = 1 \Leftrightarrow -y = 1 - 4 \Leftrightarrow -y = -3 \Leftrightarrow y = 3$$

Άρα $(x_0, y_0) = (2, 3)$

$$\text{B3. } \text{Έχουμε } g(x) = |x - 2| - 3$$

Η $g(x)$ προκύπτει από την $f(x)$, αν την μετατοπίσουμε τρεις μονάδες προς τα κάτω και δύο μονάδες δεξιά.

$$\text{B4. } h(x) = f(x) + y_0 \Leftrightarrow h(x) = |x| + 3$$

Το πεδίο ορισμού της h είναι $A_h = \mathbb{R}$ οπότε ,

$$\text{i) Για κάθε } x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$$

$$\text{ii) } h(-x) = |-x| + 3 = |x| + 3 = h(x)$$

Άρα η h είναι άρτια.

ΘΕΜΑ Γ

$$\Gamma 1. \begin{cases} x + y = \alpha \\ x + \alpha y = 1 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha - 1$$

Το σύστημα έχει μοναδική λύση αν $D \neq 0 \Leftrightarrow \alpha - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 1$

$$D_x = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \alpha$$

Άρα αν $\alpha \neq 1$, τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την (x_0, y_0) όπου.

$$x_0 = \frac{D_x}{D} = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha - 1} = \frac{(\alpha - 1)(\alpha + 1)}{\alpha - 1} = \alpha + 1$$

$$y_0 = \frac{D_y}{D} = \frac{1 - \alpha}{\alpha - 1} = \frac{-(\alpha - 1)}{\alpha - 1} = -1$$

Άρα $(x_0, y_0) = (\alpha + 1, -1)$

$\Gamma 2.$ Αν $D = 0 \Leftrightarrow \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$. Για $\alpha = 1$ το σύστημα γράφεται :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - x$$

Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, οι οποίες είναι όλα τα ζεύγη της μορφής :

$$(x, y) = (\kappa, 1 - \kappa) \text{ με } \kappa \in \mathbb{R}$$

Γ3. Το Σ_1 έχει άπειρες λύσεις αν $D = 0$

Άρα $\alpha = 1$. Για $\alpha = 1$ το (Σ_2) γράφεται

$$(\Sigma_2): \begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \text{ οπότε είναι αδύνατο.}$$

Γ4. Έχουμε $f(x) = \sqrt{2}\eta\mu\frac{21\pi}{4}x^2 - 2(\alpha - 1)x + \alpha^2 - 1$

$$\eta\mu\frac{21\pi}{4} = \eta\mu\left(\frac{16\pi}{4} + \frac{5\pi}{4}\right) = \eta\mu\left(4\pi + \pi + \frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Άρα } f(x) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x^2 - 2(\alpha - 1)x + \alpha^2 - 1$$

$$f(x) = -x^2 - 2(\alpha - 1)x + \alpha^2 - 1$$

Αφού $f(x) \leq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ο συντελεστής του x^2 είναι $-1 < 0$

Πρέπει

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma \leq 0 \Leftrightarrow [-2(\alpha - 1)]^2 - 4(-1)(\alpha^2 - 1) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$4(\alpha^2 - 2\alpha + 1) + 4\alpha^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow 4\alpha^2 - 8\alpha + 4 + 4\alpha^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$8\alpha^2 - 8\alpha \leq 0 \Leftrightarrow 8\alpha(\alpha - 1) \leq 0$$

$$\text{Λύνουμε την } \alpha(\alpha - 1) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \alpha = 1$$

Κάνουμε πίνακα προσήμου της $\alpha(\alpha - 1) = \alpha^2 - 1$

α	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\alpha^2 - 1$		+	-	+

Άρα $\alpha \in [0, 1]$, όμως το (Σ_1) έχει μοναδική λύση.

Άρα $\alpha \neq 1$, οπότε $\alpha \in [0, 1)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\Gamma = \eta\mu \frac{\pi}{10} - \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{5} - \varepsilon\varphi \frac{19\pi}{4} =$$

$$= \eta\mu \frac{\pi}{10} - \eta\mu \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5} \right) - \varepsilon\varphi \left(\frac{16\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$= \eta\mu \frac{\pi}{10} - \eta\mu \left(\frac{5\pi - 4\pi}{10} \right) - \varepsilon\varphi \left(4\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \eta\mu \frac{\pi}{10} - \eta\mu \frac{\pi}{10} - \varepsilon\varphi \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) = - \left(-\varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} \right) = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} = 1$$

$$B = \sigma\upsilon\nu^2(-\omega) - 3\eta\mu(\pi + \omega)\eta\mu(4\pi - \omega) + 3\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) =$$

$$= \sigma\upsilon\nu^2\omega - 3(-\eta\mu\omega)(-\eta\mu\omega) + 3\eta\mu^2\omega =$$

$$= \sigma\upsilon\nu^2\omega - 3\eta\mu^2\omega + 3\eta\mu^2\omega = \sigma\upsilon\nu^2\omega$$

Δ2.

$$A = \frac{\eta\mu(15\pi - \omega)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)\varepsilon\varphi(\pi + \omega)}{\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)\sigma\varphi(\pi - \omega)\varepsilon\varphi(-\omega)}$$

$$A = \frac{\eta\mu(\pi - \omega)\eta\mu\omega(+\varepsilon\varphi\omega)}{\varepsilon\varphi\omega(-\sigma\varphi\omega)(-\varepsilon\varphi\omega)}$$

$$A = \eta\mu^2\omega$$

$$\Gamma - B = A \Leftrightarrow 1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega = \eta\mu^2\omega \Leftrightarrow \eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1, \text{ Ισχύει.}$$

Δ3.

$$\text{Έχουμε: } \sqrt{\frac{1-\sqrt{B}}{1+\sqrt{B}}} - \sqrt{\frac{1+\sqrt{B}}{1-\sqrt{B}}} = \frac{-2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\frac{1-\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\omega}}{1+\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\omega}}} - \sqrt{\frac{1+\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\omega}}{1-\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\omega}}} = \frac{-2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1-|\sigma\upsilon\nu\omega|}{1+|\sigma\upsilon\nu\omega|}} - \sqrt{\frac{1+|\sigma\upsilon\nu\omega|}{1-|\sigma\upsilon\nu\omega|}} = \frac{-2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\omega}{1-\sigma\upsilon\nu\omega}} - \sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu\omega}{1+\sigma\upsilon\nu\omega}} = \frac{-2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \left(\omega \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right) \right)$$

$$\sqrt{\frac{(1+\sigma\upsilon\nu\omega)^2}{(1-\sigma\upsilon\nu\omega)(1+\sigma\upsilon\nu\omega)}} - \sqrt{\frac{(1-\sigma\upsilon\nu\omega)^2}{(1+\sigma\upsilon\nu\omega)(1-\sigma\upsilon\nu\omega)}} = \frac{-2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\frac{(1+\sigma\upsilon\nu\omega)^2}{1-\sigma\upsilon\nu^2\omega}} - \sqrt{\frac{(1-\sigma\upsilon\nu\omega)^2}{1-\sigma\upsilon\nu^2\omega}} = \frac{-2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{(1+\sigma\upsilon\nu\omega)^2}{\eta\mu^2\omega}} - \sqrt{\frac{(1-\sigma\upsilon\nu\omega)^2}{\eta\mu^2\omega}} = \frac{-2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\left(\frac{1+\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{1-\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}\right)^2} = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$$

$$\left| \frac{1+\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} \right| - \left| \frac{1-\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} \right| = \frac{-2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \left(-1 < \sigma\upsilon\nu\omega < 0, \eta\mu\omega > 0 \text{ για } \omega \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right) \right)$$

$$\frac{1+\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} - \frac{1-\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} = \frac{-2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \frac{1+\sigma\upsilon\nu\omega - (1-\sigma\upsilon\nu\omega)}{\eta\mu\omega} = \frac{-2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1+\sigma\upsilon\nu\omega - 1 + \sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} = \frac{-2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \frac{2\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} = \frac{-2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \sigma\varphi\omega = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{1}{\sigma\varphi\omega} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{-3\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega} = \frac{1}{1+(-\sqrt{3})^2} = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Άρα } \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{4} \Leftrightarrow |\sigma\upsilon\nu\omega| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1}{2}, \left[\text{Διότι } \omega \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right) \right]$$

$$\text{οπότε } \sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{1}{2}$$



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2021
Α΄ ΦΑΣΗ

E_3.Μλ2ΓΑ(α)

$$\text{Αφού } \varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \Leftrightarrow \eta\mu\omega = \varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega \Leftrightarrow \eta\mu\omega = -\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \eta\mu\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

ΟΡΟΣΗΜΟ
ΗΡΑΚΛΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ