



ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Πέμπτη 7 Ιανουαρίου 2021

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

## ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

**ΘΕΜΑ Α**Α1. Να αποδείξετε ότι για κάθε  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ισχύει  $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ 

Μονάδες 7

Α2. Κάθε εξίσωση της μορφής  $ax + \beta = 0$  όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  μπορεί να καταλήξει σε μία από τις περιπτώσεις της στήλης 3 του παρακάτω πίνακα ανάλογα με το τι είναι ο αριθμός  $\alpha$  της στήλης 1 και ο αριθμός  $\beta$  της στήλης 2.

Στήλη 1	Στήλη 2	Στήλη 3
A. $\alpha = 0$	1. $\beta = 0$	(i) Μοναδική λύση
B. $\alpha \neq 0$	2. $\beta \neq 0$	(ii) Αδύνατη
	3. $\beta \in \mathbb{R}$	(iii) Ταυτότητα

Συνδυάστε κατάλληλα ένα στοιχείο της στήλης 1 με ένα μόνο στοιχείο της στήλης 2 για να καταλήξουμε σε ένα μόνο συμπέρασμα της στήλης 3 το οποίο να ισχύει για όλες τις εξισώσεις της μορφής  $ax + \beta = 0$ .

Μονάδες 3

**A3.** Να μεταφέρετε συμπληρωμένες τις παρακάτω ισοδυναμίες ώστε να ισχύουν για κάθε  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

(α)  $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

(β)  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

(γ)  $\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

(δ)  $\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

**Μονάδες 6**

**A4.** Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

<< Για κάθε θετικό αριθμό  $a$  ισχύει  $\alpha^2 > a$  >>

Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό Αληθή ή Ψευδή δικαιολογώντας την απάντησή σας.

**Μονάδες 4**

**A5.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

(α) Για τους θετικούς αριθμούς  $\alpha, \beta$  ισχύει  $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$

(β) Η εξίσωση  $x^v = a$  με  $a < 0$  και  $v$  άρτιο φυσικό αριθμό είναι αδύνατη.

(γ) Αν  $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$  τότε  $\alpha = \beta$  για κάθε  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

(δ) Αν οι αριθμοί  $\alpha, \beta$  είναι ετερόσημοι τότε ισχύει  $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$

(ε) Αν  $\alpha + \beta < 0$  τότε κατ'ανάγκη  $\alpha < 0$  και  $\beta < 0$

**Μονάδες 5**

## **ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι παραστάσεις :

$$\kappa = |3 - \sqrt{17}| + |5 - \sqrt{17}| \quad \text{και} \quad \lambda = x^2 - (x-3)(x+3) \quad \text{όπου} \quad x \in \mathbb{R}$$

**B1.** Να αποδείξετε ότι  $\kappa = 2$  και  $\lambda = 9$

**Μονάδες 6**

**B2.** Να λύσετε την εξίσωση  $|x + \kappa| = \sqrt{\lambda}$

**Μονάδες 6**

**B3.** Να λύσετε την ανίσωση  $|2x - 1| \leq \kappa + \sqrt{\lambda}$

**Μονάδες 7**

**B4.** Να λύσετε την εξίσωση  $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$  αν  $x \in [-1, 1]$

**Μονάδες 6**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι αριθμοί :

$$\alpha = (\sqrt{5} - 1)^2 - (\sqrt{5} + 1)^2 - 4(1 - \sqrt{5}) + 5, \quad \beta = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

και η παράσταση  $A = |x - 1| - |x - 4| + 5$  όπου ο πραγματικός αριθμός  $x$  ανήκει στο κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 1$  και  $\beta = 4$ .

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι  $A = 2x$  και λύσετε την εξίσωση  $\frac{4}{A-1} + \frac{2}{A+1} = \frac{A^2+2}{A^2-1}$

**Μονάδες 8**

**Γ3.** Αν οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι  $x+2, y-1$  όπου  $\alpha \leq x \leq \beta$  και  $\alpha+1 \leq y \leq 2\beta$ , να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η περιμέτρος και το εμβαδόν του.

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Αν  $x \in [a, \beta]$  να λύσετε την εξίσωση  $(\sqrt{x^2 - 2x + 1} - |x - 4| + 5)^3 = -27$

**Μονάδες 5**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η εξίσωση  $\lambda^4 x - \lambda^3 = x - \lambda$  (1), όπου  $x \in \mathbb{R}$  και  $\lambda$  ένας πραγματικός αριθμός.

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει τιμή του  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε η εξίσωση

(1) να είναι αδύνατη και ότι η μοναδική της λύση είναι η  $x_0 = \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1}$

**Μονάδες 8**

Αν  $x_0$  είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης (1) και  $\lambda_1, \lambda_2$  οι τιμές του  $\lambda$  για τις οποίες η εξίσωση (1) είναι ταυτότητα τότε :

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι  $|x_0| \leq \frac{1}{2}$

**Μονάδες 5**

**Δ3.** Να συγκρίνετε τους αριθμούς  $^{-3\lambda_1}\sqrt{5}$  και  $\sqrt{\lambda_2^2 - \lambda_1^3 + 1}$

**Μονάδες 7**

**Δ4.** Να βρείτε την τιμή του  $x_0$  αν ισχύει :  $\lambda_2 + \sqrt{16x_0^2 + 8x_0 + 1} = 1 - |16x_0^2 - 1|$

**Μονάδες 5**