

ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Πέμπτη 7 Ιανουαρίου 2021

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

**ΘΕΜΑ Α**

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 62.

Α2. Α-2-(ii)

Α-1-(iii)

Β-3-(i)

Α3. (α)  $\alpha = 0$  και  $\beta = 0$ (β)  $\alpha \neq 0$  ή  $\beta \neq 0$ (γ)  $\alpha = 0$  ή  $\beta = 0$ (δ)  $\alpha \neq 0$  και  $\beta \neq 0$ Α4. Ο ισχυρισμός είναι Ψευδής διότι αν για παράδειγμα  $\alpha = \frac{1}{4}$  τότε

$$\alpha^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} < \frac{1}{4} = \alpha$$

Α5. (α) Σωστό

(β) Σωστό

(γ) Λάθος

(δ) Λάθος

(ε) Λάθος

**ΘΕΜΑ Β****Β1.** Έχουμε

$$\kappa = |3 - \sqrt{17}| + |5 - \sqrt{17}| = -3 + \sqrt{17} + 5 - \sqrt{17} = 2$$

Διότι  $3 - \sqrt{17} < 0$  αφού  $3 = \sqrt{9} < \sqrt{17}$  και  $5 - \sqrt{17} > 0$  αφού  $5 = \sqrt{25} > \sqrt{17}$ .

$$\lambda = x^2 - (x-3)(x+3) = x^2 - x^2 + 9 = 9$$

**Β2.**  $|x + \kappa| = \sqrt{\lambda} \Leftrightarrow |x + 2| = \sqrt{9} \Leftrightarrow |x + 2| = 3 \Leftrightarrow x + 2 = 3 \text{ ή } x + 2 = -3$

δηλαδή  $x = 1$  ή  $x = -5$

**Β3.**  $|2x - 1| \leq \kappa + \sqrt{\lambda} \Leftrightarrow |2x - 1| \leq 2 + \sqrt{9} \Leftrightarrow |2x - 1| \leq 5 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -5 \leq 2x - 1 \leq 5 \Leftrightarrow -4 \leq 2x \leq 6 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 3$$

**Β4.**  $x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) + (x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$  (που είναι δεκτή) ή  $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$  που είναι αδύνατη.

**ΘΕΜΑ Γ****Γ1.** Έχουμε

$$\alpha = (\sqrt{5} - 1)^2 - (\sqrt{5} + 1)^2 - 4(1 - \sqrt{5}) + 5 \Leftrightarrow$$

$$\alpha = 5 - 2\sqrt{5} + 1 - (5 + 2\sqrt{5} + 1) - 4 + 4\sqrt{5} + 5 \Leftrightarrow$$

$$\alpha = 5 - 2\sqrt{5} + 1 - 5 + 2\sqrt{5} - 1 - 4 + 4\sqrt{5} + 5 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

$$\beta = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \Leftrightarrow \beta = \frac{\sqrt{8}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) + \sqrt{24}(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2})^2}$$

$$\Leftrightarrow \beta = \frac{\sqrt{48} + \sqrt{16} + \sqrt{144} - \sqrt{48}}{6 - 2} \Leftrightarrow \beta = \frac{4 + 12}{4} \Leftrightarrow \beta = 4$$

**Γ2.** Έχουμε ότι  $x \in [1, 4]$  άρα  $1 \leq x \leq 4 \Leftrightarrow x - 1 \geq 0$  και  $x - 4 \leq 0$ . Άρα

$$A = |x-1| - |x-4| + 5 \Leftrightarrow A = x-1 - (-x+4) + 5 \Leftrightarrow$$

$$A = x-1+x-4+5 \Leftrightarrow A = 2x$$

$$\frac{4}{A-1} + \frac{2}{A+1} = \frac{A^2+2}{A^2-1} \Leftrightarrow \frac{4}{2x-1} + \frac{2}{2x+1} = \frac{4x^2+2}{4x^2-1}$$

Πρέπει  $(2x-1)(2x+1) \neq 0$

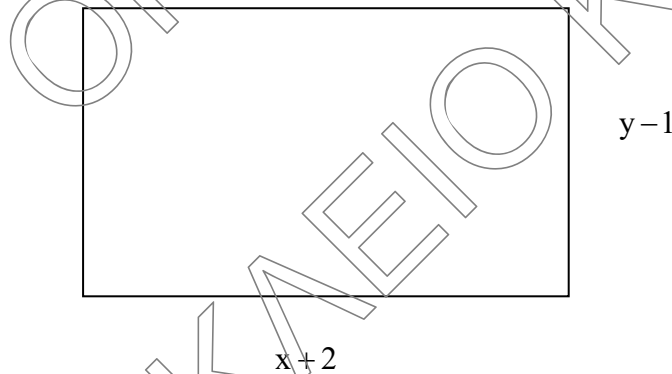
Άρα  $2x-1 \neq 0$  και  $2x+1 \neq 0$  δηλαδή  $x \neq \frac{1}{2}$  και  $x \neq -\frac{1}{2}$  που ισχύουν, αφού  $x \in [1, 4]$ .

$$\text{Είναι } 4(2x+1) + 2(2x-1) = 4x^2 + 2 \Leftrightarrow$$

$$8x+4+4x-2 = 4x^2+2 \Leftrightarrow 4x^2-12x=0 \Leftrightarrow$$

$$4x(x-3)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ (απορρίπτεται)} \text{ ή } x=3 \text{ (δεκτή)}$$

Γ3. Έχουμε ότι  $1 \leq x \leq 4$  και  $2 \leq y \leq 8$  καθώς και το σχήμα μας.



$$\text{Τότε } \Pi = 2(x+2) + 2(y-1) = 2x+4+2y-2 = 2x+2y+2 = 2(x+y+1)$$

$$\text{και } E = (x+2)(y-1).$$

Αφού έχουμε ότι  $1 \leq x \leq 4$  και  $2 \leq y \leq 8$  προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε ότι  $3 \leq x+y \leq 12 \Leftrightarrow 4 \leq x+y+1 \leq 13 \Leftrightarrow 8 \leq 2(x+y+1) \leq 26 \Leftrightarrow 8 \leq \Pi \leq 26$ .

Ομοίως, έχουμε ότι  $1 \leq x \leq 4$  και  $2 \leq y \leq 8$ , άρα  $3 \leq x+2 \leq 6$  και  $1 \leq y-1 \leq 7$ .

Επομένως,  $3 \leq (x+2)(y-1) \leq 42$  άρα  $3 \leq E \leq 42$ .

$$3 \leq x + y \leq 12 \Leftrightarrow 4 \leq x + y + 1 \leq 13 \Leftrightarrow 2 > 0$$

Γ4. Έχουμε ότι  $1 \leq x \leq 4$  οπότε η εξίσωση γίνεται .

$$A^3 = -27 \Leftrightarrow A = -\sqrt[3]{-27} \Leftrightarrow A = -3 \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow$$

$$x = -\frac{3}{2} \text{ Αδύνατη αφού } x \in [1, 4].$$

### ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε

$$\begin{aligned} \lambda^4 x - \lambda^3 &= x - \lambda \Leftrightarrow \lambda^4 x - x = \lambda^3 - \lambda \Leftrightarrow \\ (\lambda^4 - 1)x &= \lambda(\lambda^2 - 1) \Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1)x = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) \Leftrightarrow \\ (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1)x &= \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) \quad (A) \end{aligned}$$

Η εξίσωση είναι αδύνατη, όταν :

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1) = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) \neq 0 \quad (2)$$

Η εξίσωση (1) ισχύει μόνο όταν  $\lambda = 1$  ή  $\lambda = -1$

Η εξίσωση (2) ισχύει μόνο όταν  $\lambda \neq 0$  και  $\lambda \neq 1$  και  $\lambda \neq -1$

Άρα δεν υπάρχει τιμή του  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε να ισχύουν ταυτόχρονα οι (1) και (2)  
επομένως η εξίσωση (A) δεν είναι αδύνατη.

Η εξίσωση (A) έχει μοναδική λύση, όταν :

$$(\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1 \text{ και } \lambda \neq -1 \text{ και } \lambda^2 \neq -1 \text{ (που ισχύει)}$$

$$\text{Η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι η } x_0 = \frac{\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)}{(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1)} \Leftrightarrow x_0 = \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1}$$

Δ2. Έχουμε

$$|x_0| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left| \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|\lambda|}{|\lambda^2 + 1|} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\lambda^2 + 1 > 0)$$

$$\begin{aligned} \frac{|\lambda|}{\lambda^2 + 1} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\lambda^2 + 1 > 0) &\Leftrightarrow 2|\lambda| \leq \lambda^2 + 1 \Leftrightarrow |\lambda|^2 - 2|\lambda| + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (|\lambda| - 1)^2 \geq 0, \text{ ισχύει για } \lambda \neq 1 \text{ και } \lambda \neq -1. \end{aligned}$$

Δ3. Η εξίσωση είναι ταυτότητα όταν ,

$$\begin{aligned}
 (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1) = 0 &\Leftrightarrow && \text{και} && \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 &\Leftrightarrow \\
 \lambda - 1 = 0 &\Leftrightarrow \text{ ή } && \lambda + 1 = 0 &\Leftrightarrow \text{ ή } && \lambda^2 + 1 = 0 &\Leftrightarrow && \lambda = 0 &\text{ ή } && \lambda - 1 = 0 &\Leftrightarrow \text{ ή } && \lambda + 1 = 0 &\Leftrightarrow \\
 \lambda = 1 &&& \lambda = -1 &&& \lambda^2 = -1 &&& \lambda = 1 &&& \lambda = -1
 \end{aligned}$$

Αδύνατη

οπότε για τις τιμές  $\lambda = 1$  ή  $\lambda = -1$  είναι ταυτότητα .

Για να ορίζεται η  $\sqrt[3]{\lambda_1}$ , πρέπει  $\lambda_1$  να είναι θετικός ακέραιος οπότε  $\lambda_1 = -1$  και άρα  $\lambda_2 = 1$ .

Έχουμε

$$\sqrt{\lambda_2^2 - \lambda_1^3 + 1} = \sqrt{1^2 - (-1)^3 + 1} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3} \text{ και } \sqrt[3]{\lambda_1} = \sqrt[3]{-1} = -1.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Είναι} \quad \sqrt[3]{5} &= \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25} \\
 \sqrt{3} &= \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}
 \end{aligned}$$

Αφού  $27 > 25$  άρα  $\sqrt[6]{27} > \sqrt[6]{25}$ , οπότε  $\sqrt{3} > \sqrt[3]{5}$ .

**Δ4.** Έχουμε

$$\lambda_2 + |4x_0 + 1| = 1 - |16x_0^2 - 1| \Leftrightarrow (\lambda_2 = -1)$$

$$|4x_0 + 1| = -|4x_0 + 1| \cdot |4x_0 + 1| \Leftrightarrow$$

$$|4x_0 + 1| + |4x_0 + 1| \cdot |4x_0 + 1| = 0 \Leftrightarrow$$

$$|4x_0 + 1| \cdot (1 + |4x_0 + 1|) = 0 \Leftrightarrow$$

$$|4x_0 + 1| = 0 \text{ ή } 1 + |4x_0 + 1| = 0$$

$$4x_0 + 1 = 0 \quad |4x_0 + 1| = -1$$

$$x_0 = -\frac{1}{4} \quad \text{Αδύνατη}$$