ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

16-6-2021

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σελ.135 σχολικού βιβλίου

Α2. Σελ. 51 σχολικού βιβλίου

Α3. Σελ. 23 σχολικού βιβλίου

Α4. **α.** Σωστό

β. Λάθος

γ. Σωστό

δ. Σωστό

ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Ισχύει $f(x+1)=(x+1)e^{-x},\ x\in\mathbb{R}$ (1)

Έστω $y=x+1 \Leftrightarrow x=y-1,\ y\in\mathbb{R}$

Άρα η (1) γράφεται $f(y)=ye^{-(y-1)}=ye^{1-y},\ y\in\mathbb{R}$

Άρα, $f(x)=xe^{1-x},\ x\in\mathbb{R}$

Β2. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

$$f'(x)=e^{1-x}-xe^{1-x}=(1-x)e^{1-x},\ x\in\mathbb{R}$$

Είναι $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow (1-x)e^{1-x}\geq 0 \overset{e^{1-x}>0}{\Leftrightarrow} 1-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 1$ και η ισότητα μόνο για $x=1$.

Το πρόσημο και οι ρίζες της f' φαίνονται στον παρακάτω πίνακα από τον οποίο προκύπτουν η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	1 μεγ	$\searrow$	

Η συνάρτηση f είναι:

- Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,1]$
- Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$

Η συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο το 1 (μόνο) για $x=1$.

Β3. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Είναι $f''(x)=-e^{1-x}-(1-x)e^{1-x}=(x-2)e^{1-x},\ x\in\mathbb{R}$

$$f''(x)\geq 0 \Leftrightarrow (x-2)e^{1-x}\geq 0 \overset{e^{1-x}>0}{\Leftrightarrow} x-2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 2$$ και η ισότητα μόνο για x=2.

Το πρόσημο και οι ρίζες της f'' φαίνονται στον παρακάτω πίνακα από τον οποίο προκύπτουν η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της συνάρτησης f

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\frown$	Σ.κ	$\smile$	

Η συνάρτηση f είναι:

- κοίλη στο διάστημα $(-\infty,2]$
- κυρτή στο διάστημα $[2,+\infty)$

Η συνάρτηση f έχει σημείο καμπής το σημείο $B\left(2,\frac{2}{e}\right)$.

Η συνάρτηση f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη, αφού είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Ασύμπτωτη στο $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}e^{1-x}\underset{y\to+\infty}{\overset{y=1-x}{=}}\lim_{y\to+\infty}e^{y}=+\infty$$

Η συνάρτηση f δεν έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$

Ασύμπτωτη στο $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}xe^{1-x}\overset{(+\infty)\cdot 0}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x-1}}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}}=0,\text{ αφού }\lim_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty.$$

Η συνάρτηση f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y=0$, δηλαδή τον ά-ξονα $x'x$ στο $+\infty$

B4. i. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα

$\Delta_1=(-\infty,1]$, άρα $f(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),f(1)\right]=(-\infty,1]$,

αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{1-x}\underset{y\to+\infty}{\overset{y=1-x}{=}}\lim\limits_{y\to+\infty}\left((1-y)e^{y}\right)\overset{(-\infty)\cdot(+\infty)}{=}-\infty$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα

$\Delta_2=(1,+\infty)$, άρα $f(\Delta_2)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to1}f(x)\right)=(0,1)$

Διότι, $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)=1$, αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1.

Αφού $\mathbb{R}=\Delta_1\cup\Delta_2$, θα είναι $f(\mathbb{R})=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=(-\infty,1]\cup(0,1)=(-\infty,1]$.

B4. ii.

- Αν είναι λ>1 η εξίσωση $f(x)=\lambda$ είναι αδύνατη, διότι το
  $\lambda\notin f(\mathbb{R})=(-\infty,1]$.
- Αν είναι λ=1 έχει μοναδική λύση το 1 διότι έχει ολικό μέγιστο για $x=1$ (μόνο) το $f(1)=1$.
- Αν 0<λ<1 η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει δύο ρίζες,
  μία στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,1]$, διότι το $\lambda\in f(\Delta_1)=(-\infty,1]$ και
  μία στο διάστημα $\Delta_2=(1,+\infty)$, διότι το $\lambda\in f(\Delta_2)=(0,1)$ και η f είναι γνησίως μονότονη σε κάθε ένα από τα διαστήματα αυτά.
- Αν $\lambda\le 0$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει μία λύση,

$\lambda \in f(\Delta_1)=(-\infty,1]$ στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,1]$ και είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό, ενώ

$\lambda \notin f(\Delta_2)=(0,1)$, οπότε δεν έχει ρίζα στο Δ_2.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για $x<0$ η f είναι συνεχής για κάθε τιμή του α ως πολυωνυμική

Για $0<x\le \frac{3\pi}{2}$ η f είναι συνεχής ως τριγωνομετρική.

Επιπλέον

- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\alpha x^3-3x^2-x+1\right)=1$
- $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\text{συν}x=\text{συν}0=1$
- $f(0)=1$

Οπότε $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$, άρα η f είναι συνεχής στο 0.

Επομένως η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Είναι:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\alpha x^3-3x^2-x+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\alpha x^3-3x^2-x}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{x\left(\alpha x^2-3x-1\right)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left(\alpha x^2-3x-1\right)=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\text{συν}x-1}{x}=0$$

Δηλαδή έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\ne\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Γ2. i. Η f είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ από (Γ1).

Είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ με $f'(x)=-\text{ημ}x$.

Είναι $f(0)=1$ και $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\text{συν}\frac{3\pi}{2}=0$, οπότε $f(0)\ne f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

Έτσι δε πληροί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$.

Γ2. ii. Είναι $f'(x)=-\text{ημ}x$ για $x\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow -\eta\mu x=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=0 \overset{x\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow} x=\pi.$$

Γ3. Για $x<0$ είναι $f'(x)=3\alpha x^2-6x-1<0$, διότι

$\Delta=(-6)^2-4\cdot 3\cdot \alpha\cdot(-1)=36+12\alpha=12(3+\alpha)<0$, αφού $\alpha<-3$ και ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι $3\alpha<0$.

Άρα δεν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της f με αρνητική τετμημένη.

Γ4. Η f είναι συνεχής $\mathbb{R}$.

Στο $(-\infty,0)$ είναι $f'(x)<0$.

Επίσης στο $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right]$ είναι $f'(x)=-\eta\mu x$, όπου

- $f'(x)<0$ για $x\in(0,\pi)$
- $f'(\pi)=0$ και
- $f'(x)>0$ για $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$.

Αφού η f είναι συνεχής στο 0 προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μονοτονίας και ακροτάτων της συνάρτησης f.

x	$-\infty$		0		π		$\frac{3\pi}{2}$
$f'(x)$		-	‖	-	0	+	
$f(x)$		↘		↘	-1 ελαχ	↗	

Η f έχει ελάχιστο για x=π (μόνο) το -1, επομένως για κάθε $x\in\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right]$ ισχύει ότι $f(x)\geq -1$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\ln x-\frac{1}{x}$, $x>0$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $h'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$ για κάθε x>0

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Εφαρμόζουμε θεώρημα Bolzano για την h στο [1, e].

Η h είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών στο [1, e]

- $h(1)=-1<0$
- $h(e)=-\frac{1}{e}=\frac{e-1}{e}>0$

Οπότε $h(1)\cdot h(e)<0$

Από το θ.Β. υπάρχει $x_0\in(1,e)$ τ.ω.

$$h(x_0)=0\Leftrightarrow \ln x_0=\frac{1}{x_0}$$

Και είναι μοναδικό αφού η h είναι γνησίως αύξουσα

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\ln x_0-\frac{1}{x}$, $x>0$

Παρατηρούμε ότι $f'(x_o)=\ln x_o-\frac{1}{x_o}=0$ (από Δ1) μοναδικό

$f''(x)=\frac{1}{x^2}>0$ για κάθε x>0, οπότε η f′ είναι γνησίως αύξουσα

Έχουμε:

Για $0<x<x_o\overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow}f'(x)<f'(x_o)\Leftrightarrow f'(x)<0$ και f συνεχής στο $(0,x_0]$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,x_0]$

Για $x>x_o\overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow}f'(x)>f'(x_o)\Leftrightarrow f'(x)>0$ και f συνεχής στο $[x_0,+\infty)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,+\infty)$

$$f(x_o)=\ln x_o\cdot(x_o+1)-\ln x_o-1=x_o\ln x_o+\ln x_o-\ln x_o-1=x_o\frac{1}{x_o}-1=0$$

Θα δείξουμε ότι το $f(x_o)$ είναι ολικό ελάχιστο.

Πράγματι

Για $x\le x_o\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}f(x)\ge f(x_o)$

Για $x\ge x_o\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}f(x)\ge f(x_o)$

Άρα $f(x)\geq f(x_o)=0$ για κάθε x>0

Δ3. Οι g, h είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=e^{-x}-xe^{-x}$ και

$$h'(x)=\left(\frac{x_o}{e}\right)^{x+1}\ln\frac{x_o}{e}(x+1)'=\left(\frac{x_o}{e}\right)^{x+1}(\ln x_o-1)$$

Για να έχουν ένα μόνο κοινό σημείο οι C_g, C_h στο οποίο δέχονται κοινή εφαπτομένη, αρκεί να δείξουμε ότι το σύστημα $\begin{cases} g(x)=h(x)(1) \\ g'(x)=h'(x)(2)\end{cases}$ έχει μοναδική λύση x = ξ

$$(1):\ xe^{-x}=\left(\frac{x_o}{e}\right)^{x+1}$$

Επειδή $\left(\frac{x_o}{e}\right)^{x+1}>0\ \forall x\in\mathbb{R}$, η εξίσωση έχει νόημα για x>0.

Τότε

$$\ln\left(xe^{-x}\right)=\ln\left[\left(\frac{x_o}{e}\right)^{x+1}\right]\Leftrightarrow \ln x-x=(x+1)(\ln x_o-1)\Leftrightarrow$$
$$\ln x_o(x+1)-\ln x-1=0\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow x=x_o$$

ως μοναδική θέση ελαχίστου

Έχουμε λοιπόν ότι $g(x_o)=h(x_o)\Leftrightarrow x_oe^{-x_o}=\left(\frac{x_o}{e}\right)^{x_o+1}$ (*)

Τότε

$$h'(x_o)=\left(\frac{x_o}{e}\right)^{x_o+1}(\ln x_o-1)\overset{(*)}{=}x_oe^{-x_o}(\ln x_o-1)=x_oe^{-x_o}\ln x_o-x_oe^{-x_o}$$
$$\overset{\ln x_o=\frac{1}{x_o}}{=}x_oe^{-x_o}\frac{1}{x_o}-x_oe^{-x_o}=g'(x_o)$$

Ισχύει η (2) του συστήματος.

Άρα οι C_g, C_h έχουν μοναδικό κοινό σημείο $A(x_o, g(x_o))$ στο οποίο δέχονται κοινή εφαπτομένη.

Δ4. $d(x)=|f(x)-\phi(x)|\overset{f(x)>\phi(x)}{=}f(x)-\phi(x),x>0$

1η περίπτωση

Αν η ϕ παραγωγίσιμη στο x_o, ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θ. Fermat άρα

$$d'(x_o)=0 \Leftrightarrow f'(x_o)-\phi'(x_o)=0 \Leftrightarrow 0-\phi'(x_o)=0 \Leftrightarrow \phi'(x_o)=0$$

Άρα x_o κρίσιμο σημείο της ϕ.

2η περίπτωση

Αν η ϕ όχι παραγωγίσιμη στο x_o τότε πάλι το x_o κρίσιμο σημείο της ϕ.