ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΕΠΑΛ

17-6-2021

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελ. 65 σχολικού βιβλίου

Α2. Σελ. 28 σχολικού βιβλίου

Α3. **α.** Λάθος

β. Σωστό

γ. Λάθος

Α4. **α.** $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, με $x \neq 0$.

β. $\left(x^{\nu}\right)' = \nu x^{\nu-1}$

γ. $\left(cf(x)\right)' = c \cdot f'(x)$

ΘΕΜΑ Β

$$f(x) = x^2 - \alpha x + 2,\ x \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{R}$$

Β1. Είναι $f(1) = 0 \Leftrightarrow 1^2 - \alpha \cdot 1 + 2 = 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow 3 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3$

Β2. Για α=3 είναι $f(x) = x^2 - 3x + 2,\ x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \frac{f(x)}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$

Η συνάρτηση g ορίζεται όταν $x^2 - 1 \neq 0$

Είναι $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$

Η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Β3. Για α=3 είναι

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x-2}{x+1} = \frac{1-2}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

Β4. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με, $f'(x) = 2x - 3,\ x \in \mathbb{R}$

Είναι, $f(0) = 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 2$ και $f'(0) = 2 \cdot 0 - 3 = -3$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο Μ(0,2) έχει εξίσωση της μορφής $y = \lambda x + \beta$, όπου $\lambda = f'(0) = -3$.

Άρα, $\varepsilon : y = -3x + \beta$

Το σημείο Μ(0,2) επαληθεύει την εξίσωση της ευθείας, οπότε:

$$2 = -3 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 2$$

Επομένως, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο Μ(0,2) έχει εξίσωση $\varepsilon: y = -3x + 2$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Από το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων προκύπτει ότι

- $f_1 = 0,1$
- $f_2 = 0,3$
- $f_3 = 0,2$
- $f_4 = 0,4$

Έτη υπηρεσίας $[\ ,\ )$	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i	α_i
$[4,8)$	6	5	0,1	36°
$[8,12)$	10	15	0,3	108°
$[12,16)$	14	10	0,2	72°
$[16,20)$	18	20	0,4	144°
Σύνολο		50	1	360°

$$x_1 = \frac{4+8}{2} = 6,\ x_2 = \frac{8+12}{2} = 10 \text{ και } x_4 = \frac{16+20}{2} = 18$$

Είναι $f_i = \frac{v_i}{v} \Leftrightarrow v_i = v \cdot f_i$, άρα

$v_2 = v \cdot f_2 = 50 \cdot 0,3 = 15,\ \ v_3 = v \cdot f_3 = 50 \cdot 0,2 = 10,$

$\alpha_2 = f_2 \cdot 360^\circ = 0,3 \cdot 360^\circ = 108^\circ,\ \alpha_3 = f_3 \cdot 360^\circ = 0,2 \cdot 360^\circ = 72^\circ$

Γ2. $v_2 + v_3 + v_4 = 15 + 10 + 20 = 45$. Άρα 45 εκπαιδευτικοί.

Γ3. $f_1 + f_2 + f_3 = 0,1 + 0,3 + 0,2 = 0,6$. Άρα το 60%.

Γ4. Ισούται με 1.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από την περίμετρο του ορθογωνίου είναι:

$$2x + 2y = 80 \Leftrightarrow 2(x+y) = 80 \Leftrightarrow x + y = 40 \Leftrightarrow y = 40 - x$$

Επειδή το x εκφράζει μήκος είναι $x > 0$ και $40 - x > 0 \Leftrightarrow x < 40$

Επομένως ισχύει $0 < x < 40$.

Το εμβαδόν του ορθογωνίου δίνεται από τον τύπο $E = x \cdot y$

Άρα, $E(x) = x(40 - x) = -x^2 + 40x, \;\; 0 < x < 40.$

Δ2. Είναι $E'(x) = -2x + 40, \quad 0 < x < 40$

$E'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2x + 40 \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -40 \Leftrightarrow x \leq 20$ και η ισότητα μόνο για $x = 20$.

x	0		20		40
$E'(x)$		$+$	0	$-$	
$E(x)$		$\nearrow$	400 max	$\searrow$	

Άρα η συνάρτηση $E(x)$ είναι:

- Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,20]$
- Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[20,40)$

Δ3. Για x=20 η συνάρτηση E(x) παρουσιάζει μέγιστο και η μέγιστη τιμή του εμβαδού είναι:

$$E(20) = -20^2 + 40 \cdot 20 = -400 + 800 = 400m^2$$

Δ4. Οι αριθμοί 29,5 και 34,2 ανήκουν στο διάστημα $[20,40)$ στο οποίο η συνάρτηση $E(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Άρα, $29{,}5 < 34{,}2 \Leftrightarrow E(29{,}5) > E(34{,}2)$