

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2020**
Β' ΦΑΣΗ**E_3.Μλ3ΘΟ(ε2)**

ΤΑΞΗ: Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΑΠΟΦΟΙΤΟΙ

Ημερομηνία: Κυριακή 24 Μαΐου 2020
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε η f είναι σταθερή στο Δ .

Μονάδες 6

- A2.** (i) Πότε μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της.
(ii) Για μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ , τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ

Μονάδες 8

- A3.** Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός:
"Κάθε συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ έχει μέγιστο και ελάχιστο"
Να εξετάσετε αν ο παραπάνω ισχυρισμός είναι αληθής ή ψευδής (2 Μονάδες)
και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας (4 Μονάδες)

Μονάδες 6

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- (α) Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f .
- (β) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta = (\alpha, \beta)$ τότε το σύνολο τιμών της f στο Δ είναι:

$$f(\Delta) = (\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x), \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x))$$
- (γ) Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε αυτές είναι υποχρεωτικά ίσες.
- (δ) Οι πολωνυμικές συναρτήσεις έχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες.
- (ε) Αν για μία παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x_0) = 0$ για κάποιο $x_0 \in A$ τότε είναι βέβαιο ότι στο $x_0 \in A$ η f έχει τοπικό ακρότατο

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha^2, & x \leq 0 \\ e^{-x} + 2\alpha - 2, & x > 0 \end{cases}$

B1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και να εξετάσετε αν το $x = 0$ είναι κρίσιμο σημείο της f .

Μονάδες 6

B2. Να αποδείξετε ότι

- (i) ότι δεν υπάρχει σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της f να παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 3$

Μονάδες 4

- (ii) το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(0, +\infty)$

Μονάδες 5

B3. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}

Μονάδες 6

B4. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f και να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f άξονα x ' x και τις ευθείες $x = -1$, $x = 1$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

Γ1. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f , τα ακρότατά της, τα διαστήματα στα οποία είναι κυρτή και κοίλη καθώς και τα σημεία καμπής της.

Μονάδες 7

Γ2. Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις $g(x) = e^x$, $h(x) = x^e$ έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο.

Μονάδες 5

Γ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(3) - f(2)}{x - 1} + \frac{1 - ef(x)}{e^{x+1} - e} = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Μονάδες 6

Γ4. (i) Να βρεθεί ο $v \in \mathbb{N}$ με $v > 3$ ώστε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(v^2 x)}{2^v x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2020^{f(x)} + 2021^{f(x)}}{2020^{f(x)} - 2021^{f(x)}}$

(ii) Για $v = 4$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_v^{v+1} (x + v)f(x + v)dx$

Μονάδες 7 (4+3)

ΘΕΜΑ Δ

Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και την δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν:

- $f'(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(1) = 1 = -f(-1)$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{2h} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x) - x^2}{x-1}$
- $g''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δ1. Να δείξετε

(α) $g(1) = 1$ και $g'(1) = 2$

Μονάδες 5

(β) $g(x) \leq 2x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 3

Δ2. Να δείξετε ότι $f(0) = 0$

Μονάδες 6

Δ3. Να λύσετε την εξίσωση $2x - f(x) = g(x+1) - 1$ για $x \leq 0$

Μονάδες 6

Δ4. Αν επιπλέον η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ να δείξετε ότι $2 \cdot \int_1^2 f(x) dx \leq 4f(2) - 5$

Μονάδες 5