

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2019**
Α΄ ΦΑΣΗ**E_3.Μλ3ΘΟ(ε)**

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 12 Ιανουαρίου 2019
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**ΘΕΜΑ Α**

A1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^v, v \in \mathbb{N} - \{0,1\}$
είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = vx^{v-1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

A2. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$
ελάχιστο το $f(x_0)$;

Μονάδες 4

A3. Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός :

<< Υπάρχει το όριο στο μηδέν της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x^{2v+1}}, v \in \mathbb{N} >>$

(α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό **Αληθή** ή **Ψευδή**.

Μονάδες 1

(β) Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας στο (α) ερώτημα.

Μονάδες 3

Α4. Να μεταφέρετε τον παρακάτω πίνακα στο τετράδιό σας, με συμπληρωμένες τις δύο τελευταίες γραμμές τοποθετώντας ερωτηματικό (;) στις περιπτώσεις όπου έχουμε απροσδιοριστία.

Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$ το όριο της f είναι:	$+\infty$	$-\infty$	0	$\alpha < 0$	$+\infty$	$\alpha > 0$
Αν στο $x_0 \in \mathbb{R}$ το όριο της g είναι:	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
τότε το όριο της $f + g$ είναι:						
τότε το όριο της $f \cdot g$ είναι						

Μονάδες 6

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη

(α) Κάθε συνεχής συνάρτηση διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές της ρίζες χωρίζουν το πεδίο ορισμού της

(β) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε δε μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0

(γ) Αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε και η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

δ) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2019
Α' ΦΑΣΗ

Ε_3.Μλ3ΘΟ(ε)

(ε) Η συνάρτηση $f(x) = a^x, a > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = x \cdot a^{x-1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = 1 - e^x, x \in \mathbb{R}$ και $h(x) = \ln \frac{1}{x}, x > 0$

B1. Να ορίσετε την συνάρτηση $h \circ g$

Μονάδες 5

B2. Αν $f(x) = (h \circ g)(x) = \ln\left(\frac{1}{1 - e^x}\right), x < 0$ να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 8

B3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντιστροφή της.

Μονάδες 7

B4. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta \mu f(x)}{\ln(-x)} = 0$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Έστω f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $A = [-5, 5]$ για την οποία ισχύουν ότι:

$$x^2 + f^2(x) = 25 \text{ για κάθε } x \in A \text{ και } f(0) = 5$$

Γ1. Να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $A = [-5, 5]$

Μονάδες 2

Γ2. Να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$, $x \in A$

Μονάδες 7

Γ3. (i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, 5]$

Μονάδες 4

(ii) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^3) - f(x^2) > x^3 - x^2$ στο διάστημα $[0, 1]$

Μονάδες 5

Γ4. Να δείξετε ότι η f έχει μέγιστη τιμή $f(0) = 5$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι η εξίσωση $\sqrt{24 + \sin^2 x} = 6 + \eta \mu^2 f(x)$ είναι αδύνατη.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - x^2 + 4}{x - 2} = 1$ και $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+h) - g(1-h)}{h} = 10$
- Η γραφική παράσταση της g διέρχεται από το σημείο $M(1, -5)$, η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μοναδική λύση την $x = 3$ και $g(0) \cdot g(4) < 0$

Δ1. Να δείξετε ότι (α) $f'(2) = 5$ (β) $g'(1) = 5$

Μονάδες 8

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2019**
Α΄ ΦΑΣΗ**E_3.Μλ3ΘΟ(ε)**

Δ2. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της f στο σημείο $A(2, f(2))$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g στο σημείο $B(1, g(1))$

Μονάδες 5

Δ3. Να μελετήσετε τη g ως προς το πρόσημο και να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [3, 5]$ ώστε $g(x) \leq g(x_0)$ για κάθε $x \in (-\infty, 5]$

Μονάδες 6

Δ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $xf(x) = (x-2)e^x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 2)$

Μονάδες 6

ΟΕΦΕ