

ΤΑΞΗ: Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Σάββατο 12 Ιανουαρίου 2019
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 60
- A2.** α. Λάθος β. Λάθος γ. Σωστό δ. Σωστό ε. Λάθος
- A3.** 1. Γ 2. Β 3. Ζ 4. Ε

ΘΕΜΑ Β

- B1.** Η f ως πολυωνυμική ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα το πεδίο ορισμού της είναι $D_f = \mathbb{R}$.

Το πεδίο ορισμού είναι συμμετρικό ως προς το μηδέν. Έτσι αν $x \in D_f$ και το $-x \in D_f$.

Θέτουμε όπου x το $-x$ και έχουμε:

$$f(-x) = \alpha(-x)^4 + \beta(-x)^2 = \alpha x^4 + \beta x^2 = f(x)$$

Άρα η f είναι άρτια.

- B2.** Αφού η f διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(2,4)$ και $\Delta(1,1)$ τότε:

$$\begin{cases} f(2) = 4 \\ f(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \cdot 2^4 + \beta \cdot 2^2 = 4 \\ \alpha \cdot 1^4 + \beta \cdot 1^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16\alpha + 4\beta = 4 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\alpha + \beta = 1 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4\alpha - \beta = -1 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow -3\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

Για $\alpha = 0$ η $\alpha + \beta = 1$ γίνεται $0 + \beta = 1 \Leftrightarrow \beta = 1$

B3. Όπως προκύπτει από τη γραφική παράσταση η συνάρτηση είναι:

Γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in (-\infty, -3]$

Γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in [-3, +\infty)$

Για $x = -3$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(-3) = 1$

B4. Αφού η C_3 είναι μετατόπιση της $f(x) = x^2$ της οποίας η γραφική παράσταση είναι η C_1 τότε βλέπουμε ότι είναι μετατοπισμένη κατά 2 προς τα δεξιά και 2 προς τα επάνω. Άρα η συνάρτηση που περιγράφει η C_3 είναι η $f(x-2) + 2 = (x-2)^2 + 2 = x^2 - 4x + 4 + 2 = x^2 - 4x + 6 = g(x)$.
Άρα η C_2 είναι η γραφική παράσταση της $h(x)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε,

$$\begin{aligned} A(x) &= \sin^4 x - \eta\mu^4 x - 2\sin^2 x \\ &= (\sin^2 x + \eta\mu^2 x)(\sin^2 x - \eta\mu^2 x) - 2\sin^2 x \\ &= \sin^2 x - \eta\mu^2 x - 2\sin^2 x = -\eta\mu^2 x - \sin^2 x \\ &= -(\eta\mu^2 x + \sin^2 x) = -1 \end{aligned}$$

Γ2. Έχουμε,

- $\sin(3\pi - x) = \sin(2\pi + \pi - x) = \sin(\pi - x) = -\sin x$
- $\sin(3\pi + x) = \sin(2\pi + \pi + x) = \sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\sin(4\pi - x) = \sin(-x) = -\sin x$
- $\eta\mu\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) = \eta\mu\left(4\pi - \frac{\pi}{2} + x\right) = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) = -\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x$
- $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\varphi x$

$$\bullet \sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \sigma\varphi\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \varepsilon\varphi x$$

Άρα,

$$B(x) = \frac{(-\sin x)^2 + (-\sin x \cdot \sin x) + (-\sin x)^2}{\sigma\varphi x \cdot \varepsilon\varphi x} = \frac{\sin^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x}{1} = \sin^2 x$$

Γ3. Η δοθείσα εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} \sin^2 x - (-1) &= \frac{7}{2} \eta\mu x \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 2 = 7\eta\mu x \\ \Leftrightarrow 2(1 - \eta\mu^2 x) + 2 &= 7\eta\mu x \Leftrightarrow 2 - 2\eta\mu^2 x + 2 - 7\eta\mu x = 0 \\ \Leftrightarrow 2\eta\mu^2 x + 7\eta\mu x - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Θέτουμε $\eta\mu x = \omega$, $\omega \in [-1, 1]$ και η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned} 2\omega^2 + 7\omega - 4 &= 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{-7 \pm 9}{4} \text{ ή } \omega = \frac{-7 - 9}{4} \\ \Leftrightarrow \omega &= \frac{2}{4} \text{ ή } \omega = -\frac{16}{4} \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{2} \text{ ή } \omega = -4 \end{aligned}$$

Έχουμε ότι,

$$\eta\mu x = \frac{1}{2} \text{ ή } \eta\mu x = -4 \text{ (απορρίπτεται)}$$

Οπότε, $\eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right)$ και οι λύσεις της εξίσωσης δίνονται από τους τύπους:

$$x = \begin{cases} 2κπ + \frac{\pi}{6} \\ \text{ή} \\ 2κπ + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \text{ με } κ \in \mathbb{Z}$$

Όμως οι λύσεις πρέπει να ανήκουν στο διάστημα $[0, 2\pi]$, δηλαδή:

$$\begin{aligned} \bullet \quad x \in [0, 2\pi] &\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \leq 2\pi \\ &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} \leq 2\kappa\pi \leq \frac{11\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \leq \kappa \leq \frac{11}{12} \end{aligned}$$

Όμως $\kappa \in \mathbb{Z}$, άρα $\kappa = 0$ και η λύση της εξίσωσης είναι η $x = \frac{\pi}{6}$.

$$\begin{aligned} \bullet \quad x \in [0, 2\pi] &\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \leq 2\pi \\ &\Leftrightarrow -\frac{5\pi}{6} \leq 2\kappa\pi \leq \frac{7\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{5}{12} \leq \kappa \leq \frac{7}{12} \end{aligned}$$

Όμως $\kappa \in \mathbb{Z}$, άρα $\kappa = 0$ και η λύση της εξίσωσης είναι η $x = \frac{5\pi}{6}$.

Γ4. Για κάθε $x \neq \frac{\kappa\pi}{2}$, με $\kappa \in \mathbb{Z}$ έχουμε:

$$B^2(x) + B(x) > B\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2A(x)$$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 x)^2 + \sin^2 x > \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2(-1)$$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 x)^2 + \sin^2 x > \eta\mu^2 x - 2$$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 x)^2 + \sin^2 x > 1 - \sin^2 x - 2$$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 x)^2 + 2\sin^2 x + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin^2 x + 1)^2 > 0, \text{ που ισχύει για κάθε } x \neq \frac{\kappa\pi}{2}, \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z}, \text{ διότι } \sin^2 x + 1 \neq 0.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. • Επειδή η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$ ισχύει: $f(0)=1 \Rightarrow \gamma=1$

Αν θεωρήσουμε $g(x) = (a-1) \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi}{2\beta}x\right)$ τότε παρουσιάζει μέγιστο τον αριθμό $|a-1|$. Άρα η γραφική παράσταση της f , η οποία είναι μετατοπισμένη κατά μία μονάδα προς τα πάνω της γραφικής παράστασης της g , θα παρουσιάζει μέγιστο τον αριθμό $|a-1|+1$.

$$\bullet \max f = 3 \Leftrightarrow |a-1| + \gamma = 3 \xRightarrow{\gamma=1} |a-1| + 1 = 3 \Rightarrow |a-1| = 2$$

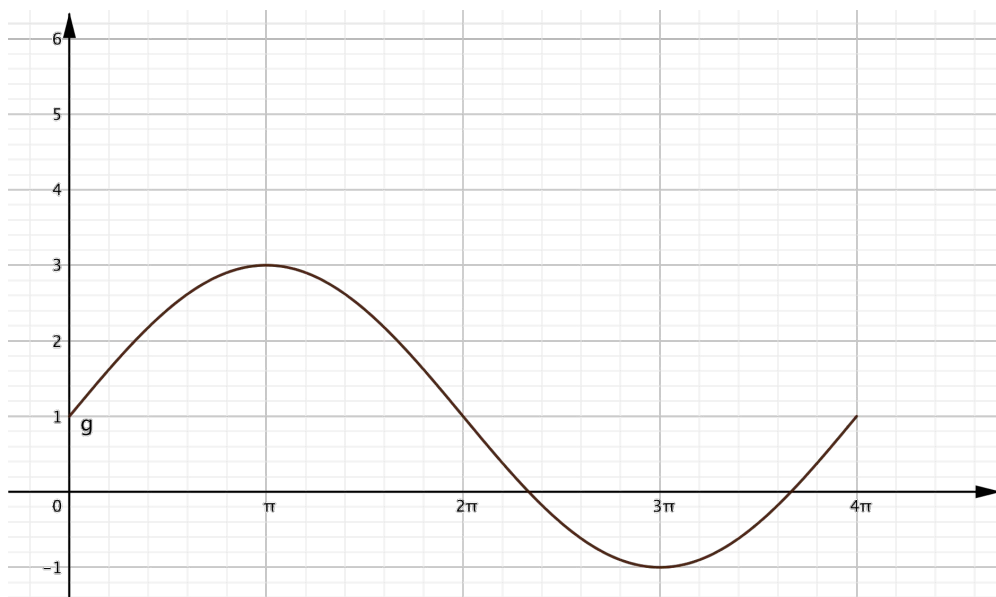
$$a-1=2 \text{ ή } a-1=-2$$

$$a=3 \text{ δεκτή } a=-1 \text{ απορρίπτεται αφού } a>0$$

$$a=3 \text{ δεκτή } a=-1 \text{ απορρίπτεται αφού } a>0$$

$$\bullet T = 4\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2\beta}} = 4\pi \Leftrightarrow 4\beta = 4\pi \Leftrightarrow \beta = \pi, \text{ άρα } f(x) = 2\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right) + 1$$

Δ2. Αν $g(x) = 2\eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)$, τότε η γραφική παράσταση της f προκύπτει αν μετατοπίσουμε την f μία μονάδα προς τα πάνω.



Δ3. $\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{7} < \frac{6\pi}{7} < \pi$ και επειδή η $\eta_{\mu x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ άρα

$1 > \eta_{\mu} \frac{5\pi}{7} > \eta_{\mu} \frac{6\pi}{7} > 0$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \pi]$ τελικά

προκύπτει $f\left(\eta_{\mu} \frac{5\pi}{7}\right) > f\left(\eta_{\mu} \frac{6\pi}{7}\right)$.

Δ4. • $f(0) = 1$

$$\bullet f\left(\frac{25\pi}{3}\right) = 2\eta_{\mu}\left(\frac{25\pi}{6}\right) + 1 = 2\eta_{\mu}\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 2\eta_{\mu}\frac{\pi}{6} + 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 2$$

άρα το σύστημα γίνεται $\begin{cases} y^2 - 3x^2 = 4 \\ y = x^2 \end{cases}$

$$y^2 - 3x^2 = 4 \xRightarrow{y=x^2} (x^2)^2 - 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

Θέτω $x^2 = \omega$, $\omega \geq 0$, άρα $\omega^2 - 3\omega - 4 = 0$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$$

$$\text{άρα } \omega_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{3 \pm 5}{2}, \omega_1 = 4 \text{ δεκτή, } \omega_2 = -1 \text{ απορρίπτεται}$$

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

• αν $x = 2$ τότε $y = 2^2 = 4$, άρα $(x, y) = (2, 4)$

• αν $x = -2$ τότε $y = (-2)^2 = 4$, άρα $(x, y) = (-2, 4)$