ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ

10-6-2019

ΘΕΜΑ Α

Α1. **α)** Σχολικό βιβλίο, σελίδα 15

β) i. Μια συναρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη όταν είναι 1-1.

ii. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 35

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 142

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 135

Α4. α) Λάθος

Αιτιολόγηση: σχόλιο Σχολικό βιβλίο, σελίδα 134

β) Λάθος

Αιτιολόγηση:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & x\neq 1\\ 5 & x=1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2 \text{ και } f(1)=5$$

Άρα $\lim_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$

Α5. γ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+\lambda\right)=2 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{e}\right)^x+\lambda\right)=2 \Leftrightarrow 0+\lambda=2 \Leftrightarrow \lambda=2$$

Β2. Έστω $g(x)=f(x)-x=e^{-x}-x+2,\ x\in\mathbb{R}$

Η g είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=-e^{-x}-1<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα.

Η g είναι συνεχής στο [2,3] και

- $g(2)=e^{-2}>0$
- $g(3)=e^{-3}-1<0$

Οπότε $g(2)\cdot g(3)<0$.

Από Θεώρημα Bolzano επομένως υπάρχει $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)-x_0=0$ και είναι μοναδικό αφού η g είναι γνησίως φθίνουσα.

B3. $f'(x)=-e^{-x}<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα οπότε 1-1.

Επιπλέον η f είναι συνεχής οπότε

$D_{f^{-1}}=f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=(2,+\infty)$, διότι

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$ και
- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{-x}+2\right)\underset{u\to+\infty}{\overset{u=-x}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\left(e^{u}+2\right)=+\infty$

Για y>2 και $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

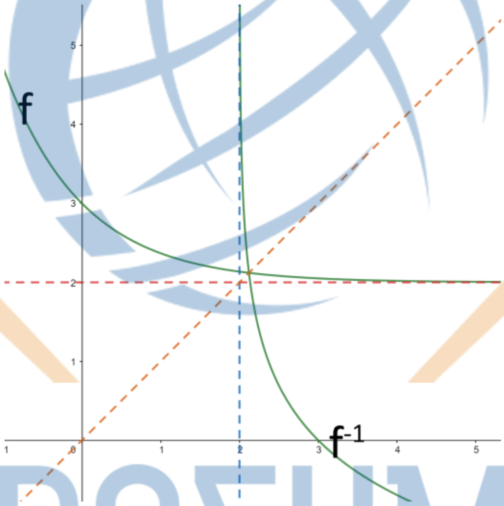
$f(x)=y\Leftrightarrow e^{-x}+2=y\Leftrightarrow e^{-x}=y-2\Leftrightarrow -x=\ln(y-2)\Leftrightarrow x=-\ln(y-2)$

Άρα $f^{-1}(x)=-\ln(x-2),\ x>2$

B4. $\lim\limits_{x\to2}f^{-1}(x)=\lim\limits_{x\to2}\left[-\ln(x-2)\right]\underset{u_o=0}{\overset{u=x-2}{=}}-\lim\limits_{u\to0}\ln u=+\infty$

Άρα η x=2 κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$ Η C_f είναι η γραφική της $\left(e^{-1}\right)^x=\left(\frac{1}{e}\right)^x$ μετατοπισμένη 2 μονάδες πάνω.

Η $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρική της C_f ως προς την y=x.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη θα είναι και συνεχής. Οπότε θα είναι και συνεχής στο 1.

- $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(e^{x-1}+\beta x\right)=1+\beta$
- $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(x^2+\alpha\right)=1+\alpha$
- $f(1)=1+\alpha$

  Για να είναι συνεχής στο 1 πρέπει και αρκεί $1+\beta=1+\alpha\Leftrightarrow\alpha=\beta$. Οπότε $f(1)=1+\alpha=1+\beta$.

  Η f είναι παραγωγίσιμη άρα είναι παραγωγίσιμη και στο 1.

Είναι:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\ell\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-1-\beta}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta}{1}=1+\beta$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+\alpha-1-\alpha}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2$$

Οπότε $1+\beta=2\Leftrightarrow\beta=1$. Έτσι α=1.

Γ2. Για x<1 είναι $f'(x)=e^{x-1}+1>0$ και

για x>1 είναι $f'(x)=2x>0$.

Αφού η f είναι συνεχής στο 1 θα είναι γνησίως αύξουσα στο $x\in\mathbb{R}$ οπότε

$f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$, διότι

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x-1}+x\right)=-\infty$ και
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

Γ3.i. Είναι $f(0)=\frac{1}{e}>0$. Οπότε $0\in f((-\infty,0])=\left(-\infty,\frac{1}{e}\right]$ και η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε 1-1 και έτσι έχει μοναδική ρίζα $x_0\in(-\infty,0)$.

Γ3.ii. $x>x_0\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f(x)>f(x_0)=0$

$f^2(x)-x_0f(x)=0\Leftrightarrow f(x)(f(x)-x_0)=0\overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow}f(x)-x_0=0\Leftrightarrow f(x)=x_0$ που είναι αδύνατη διότι $f(x)>0>x_0$

Γ4. Τη χρονική στιγμή t_0 είναι $x(t_0)=3$, $y(t_0)=10$.

Είναι $E(t)=\frac{x(t)\cdot y(t)}{2}=\frac{x(t)\left[x^2(t)+1\right]}{2}=\frac{x^3(t)+x(t)}{2}$, $t\ge 0$.

$$E'(t)=\frac{3x^2(t)x'(t)+x'(t)}{2}=\frac{(3x^2(t)+1)x'(t)}{2},\ t\ge 0$$

Άρα $E'(t_0)=\frac{3x^2(t_0)x'(t_0)+x'(t_0)}{2}=\frac{3\cdot 3^2\cdot 2+2}{2}=\frac{56}{2}=28$τ.μ./sec

Θέμα Δ

Δ1. Παρατηρούμε ότι η f γράφεται $f(x)=(x-1)\ln\left[(x-1)^2+1\right]+\alpha x+\beta$, $x\in\mathbb{R}$

Πρέπει $A\in C_f\Leftrightarrow f(1)=1\Leftrightarrow\alpha+\beta=1$ (1)

Είναι $f'(x)=\ln\left[(x-1)^2+1\right]+\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}+\alpha$

Επειδή η γραφική παράσταση της f εφάπτεται στην ευθεία y=-x+2 η κλίση της f στο Α είναι -1 οπότε

$f'(1)=-1\Leftrightarrow\ln\left[(1-1)^2+1\right]+\frac{2(1-1)^2}{(1-1)^2+1}+\alpha=-1\Leftrightarrow\alpha=-1$. Άρα β=2.

Δ2. Αν $h(x)=f(x)-(-x+2)=(x-1)\ln\left[(x-1)^2+1\right]\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

διότι $(x-1)^2+1\geq 1$, άρα $\ln\left[(x-1)^2+1\right]\geq 0$ και η ισότητα για x=1.

$$E=\int_1^2|h(x)|dx=\int_1^2 h(x)dx=\int_1^2(x-1)\ln\left[(x-1)^2+1\right]dx$$

Θέτουμε

$u=(x-1)^2+1\Rightarrow du=2(x-1)dx\Rightarrow \frac{1}{2}du=(x-1)dx$

Για $x=1$ τότε $u=1$

Για $x=2$ τότε $u=2$

$E=\frac{1}{2}\int_1^2\ln u du=\frac{1}{2}\int_1^2(u)'\ln u du=\frac{1}{2}[u\ln u]_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2 1dx=\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)$τ.μ.

Δ3.i. Είναι $f'(x)=\ln\left[(x-1)^2+1\right]+\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}-1,\ x\in\mathbb{R}$,

Είναι $(x-1)^2+1\geq 1\overset{\ln x\uparrow}{\Rightarrow}\ln\left[(x-1)^2+1\right]\geq 0$ και $2(x-1)^2\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και οι ισότητες μόνο για x=1.

Άρα $\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}\geq 0$ και ισότητα μόνο για x=1.

$$\ln\left[(x-1)^2+1\right]+\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}\geq 0\Rightarrow \ln\left[(x-1)^2+1\right]+\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1}-1\geq -1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f'(x)\geq -1$$

Και η ισότητα μόνο για x=1.

Δ3.ii. Έστω $\phi(x)=f(x)+x,\ x\in\mathbb{R}$. Οπότε $\phi'(x)=f'(x)+1\geq 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για x=1 και f συνεχής στο 1. Άρα η ϕ είναι γνησίως αύξουσα.

Όμως

$$\phi(x)=f(x)+x=(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)-x+2+x$$
$$=(x-1)\ln\left(x^2-2x+2\right)+2$$

Οπότε έχουμε:

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda\geq(\lambda+1)\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)+\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$
$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda+\frac{1}{2}\geq(\lambda+1)\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)+2\Leftrightarrow$$
$$\phi\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq\phi(\lambda)\Leftrightarrow\lambda+\frac{1}{2}\geq\lambda\Leftrightarrow\frac{1}{2}\geq 0$$

Που ισχύει, άρα και η αρχική αληθής.

Δ4. Είναι $g'(x)=-3x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$ και

$x^2\geq 0\Leftrightarrow -3x^2\leq 0\Leftrightarrow -3x^2-1\leq -1\Leftrightarrow g'(x)\leq -1$ και η ισότητα για x=0

Αφού $f'(x)\geq -1$ και η ισότητα μόνο για x=1 και $g'(x)\leq -1$ και η ισότητα μόνο για x=0 οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν ίδια κλίση μόνο για x=1 και x=0 αντίστοιχα.

Είναι $g(0)=2$ άρα η εφαπτομένη της g στο (0,0) είναι η

$$y-g(0)=g'(0)(x-0)\Leftrightarrow y-2=-x\Leftrightarrow y=-x+2$$

όπου είναι ίδια με την εφαπτομένη της f στο Α(1,1).