# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

## ΕΠΑΛ

## 8-6-2019

**ΘΕΜΑ Α**

**Α1.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 28

**Α2.** α) Σχολικό βιβλίο σελίδα 59
β) Σχολικό βιβλίο σελίδα 59

**Α3.** α) **Λ**άθος β) **Σ**ωστό γ) **Λ**άθος δ) **Λ**άθος ε) **Σ**ωστό

**ΘΕΜΑ Β**

**Β1.** Η τυπική απόκλιση s είναι $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{4}=2$ και $CV=20\%=\frac{20}{100}=0,2$

Επιπλέον, ισχύει ότι:

$$CV=\frac{s}{\bar{x}}\Leftrightarrow 0,2=\frac{2}{\bar{x}}\Leftrightarrow 0,2\cdot\bar{x}=2\Leftrightarrow 2\cdot\bar{x}=20\Leftrightarrow\bar{x}=\frac{20}{2}\Leftrightarrow\bar{x}=10$$

**Β2.** Ισχύει: $\sum_{i=1}^{\nu}t_i=\sum_{i=1}^{6}t_i=11+7+\kappa+13+11+10=52+\kappa$

Επομένως, για την μέση τιμή ισχύει:

$$\bar{x}=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}t_i\Leftrightarrow 10=\frac{1}{6}\ 52+\kappa\ \Leftrightarrow 52+\kappa=60\Leftrightarrow\kappa=8$$

**Β3.** Οι τιμές του δείγματος τοποθετημένες σε αύξουσα σειρά είναι:

7, 8, 10, 11, 11, 13

Το μέγεθος του δείγματος είναι $\nu=6$ (άρτιος). Επομένως, η διάμεσος είναι:

$$\delta=\frac{t_3+t_4}{2}=\frac{10+11}{2}=\frac{21}{2}=10,5$$

Το εύρος R του δείγματος είναι: $R=t_{max}-t_{min}=13-7=6$

**Β4.** Θεωρούμε ένα νέο δείγμα με τιμές $y_i$ για το οποίο ισχύει $y_i=x_i-2$, όπου $x_i$ οι τιμές του αρχικού δείγματος. Τότε:

$$\bar{y}=\bar{x}-2=10-2=8$$

και

$$s_y=s_x=2$$

Άρα, ο νέος συντελεστής μεταβολής $CV_y$ είναι: $CV_y=\frac{s_y}{\bar{y}}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}>\frac{1}{10}$ άρα το νέο δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** Είναι f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ διότι $x^2-2x+10>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x^2-2x+10}}(x^2-2x+10)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2-2x+10}}(2x-2) \\ &= \frac{2(x-1)}{2\sqrt{x^2-2x+10}} \\ &= \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}},\ x\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

**Γ2.** $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}}\geq 0 \Leftrightarrow x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 0$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+10}}<0 \Leftrightarrow x-1<0 \Leftrightarrow x<0$, αφού $\sqrt{x^2-2x+10}>0$.

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $1,+\infty$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $-\infty,1$. Επιπλέον, παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$ το $f(1)=\sqrt{1^2-2\cdot 1+10}=3$.

Επομένως, $f(x)\geq f(1) \Leftrightarrow f(x)\geq 3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

**Γ3.** Είναι $f(5)=\sqrt{5^2-2\cdot 5+10}=5$ και $f'(5)=\dfrac{5-1}{\sqrt{5^2-2\cdot 5+10}}=\dfrac{4}{5}$

Η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας στο σημείο $M(5,5)$ είναι $\varepsilon: y=f'(5)\cdot x+\beta$.

Άρα, $\varepsilon: y=\dfrac{4}{5}x+\beta$

Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $M(5,5)$, άρα η συντεταγμένες του την επαληθεύουν. Συνεπώς, $5=\dfrac{4}{5}\cdot 5+\beta \Leftrightarrow 5=4+\beta \Leftrightarrow \beta=5-4 \Leftrightarrow \beta=1$

Άρα, η εφαπτομένη ευθεία έχει εξίσωση $\varepsilon: y=\dfrac{4}{5}x+1$

**Γ4.** Η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $x'x$ για $y=0$, οπότε

$0=\dfrac{4}{5}x+1 \Leftrightarrow 0=4x+5 \Leftrightarrow 4x=-5 \Leftrightarrow x=-\dfrac{5}{4}$, δηλαδή στο σημείο $A(-\dfrac{5}{4},0)$

Η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $y'y$ για $x=0$, οπότε $y=\dfrac{4}{5}\cdot 0+1 \Leftrightarrow y=1$, δηλαδή στο σημείο $B(0,1)$

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.** Για $\lambda=3$ είναι: $f(x)=x^3-3x^2+3x,\ x\in\mathbb{R}$

Τότε, $f'(x)=3x^2-6x+3=3(x^2-2x+1)=3(x-1)^2\geq 0,\ x\in\mathbb{R}$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)\geq 0,\ x\in\mathbb{R}$ και η ισότητα για $x=1$.

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$$\frac{3}{8}=\frac{9}{24} \text{ και } \frac{5}{6}=\frac{20}{24} \text{ άρα } \frac{3}{8}<\frac{5}{6} \overset{f\uparrow\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{3}{8}\right)<f\left(\frac{5}{6}\right)$$

**Δ2.** Είναι,

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{(\sqrt{x}-1)(x^2-x)}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)^{\cancel{2}}}{x(\sqrt{x}-1)\cancel{(x-1)}}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)}{x(\sqrt{x}-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x(\sqrt{x}^2-1^2)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}{x\cancel{(x-1)}}=\lim_{x\to 1}\frac{3(\sqrt{x}+1)}{x}$$

$$=\frac{3(\sqrt{1}+1)}{1}=6$$

**Δ3.** Ο συντελεστής διεύθυνσης είναι η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης f. Επομένως,

$$f'(x)=3(x-1)^2,\ \ x\in\mathbb{R}$$

Είναι, $f''(x)=6(x-1)\cdot(x-1)'=6(x-1),\ \ x\in\mathbb{R}$

$f''(x)\geq 0 \Leftrightarrow 6(x-1)\geq 0 \Leftrightarrow x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$

$f''(x)<0 \Leftrightarrow 6(x-1)<0 \Leftrightarrow x-1<0 \Leftrightarrow x<1$

Η $f'$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\ 1,+\infty\ $ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\ -\infty,1\ $, άρα παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$.

Είναι $f(1)=1^3-3\cdot 1^2+3\cdot 1=1-3+3=1$

Επομένως, η εφαπτομένη έχει ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης στο σημείο $M(1,1)$.

**Δ4.** Είναι, $f'(x)=3x^2-6x+\lambda,\ \ x\in\mathbb{R}$

Είναι, $\Delta=(-6)^2-4\cdot 3\cdot\lambda=36-12\lambda$.

Για να μην παρουσιάζει η συνάρτηση f ακρότατα αρκεί

$$\Delta\leq 0\Leftrightarrow 36-12\lambda\leq 0\Leftrightarrow 36\leq 12\lambda\Leftrightarrow\lambda\geq 3.$$