

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2018**  
Β' ΦΑΣΗ**E\_3.Μλ3ΘΟ(ε)**

**ΤΑΞΗ:** Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ:** ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**Ημερομηνία: Σάββατο 21 Απριλίου 2018**  
**Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες**

**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ****ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα  $[α,β]$ .

Αν  $G$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[α,β]$ , τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_a^b f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

**Μονάδες 8**

**A2.** Έστω  $A$  ένα υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ . Τι ονομάζεται πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το  $A$ .

**Μονάδες 3**

**A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  και  $f^{-1} : f(A) \rightarrow \mathbb{R}$  η αντίστροφη, τότε ισχύει:  $f(f^{-1}(x)) = x$ , για κάθε  $x \in A$ .

**β)** Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ισχύει:

Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$  τότε:  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = 0$

- γ) Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε διατηρεί πρόσημο στο  $\Delta$ .
- δ) Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι παραγωγίσιμες σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού τους και δεν είναι συνεχείς σε αυτό.
- ε) Για κάθε συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει καμπή, ισχύει  $f''(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = (1+x) \cdot e^{-x}$ ,  $x \geq 0$ .

- B1.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

**Μονάδες 7**

- B2.** Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης  $C$  της  $f$  και να σχεδιάσετε τη  $C$ .

**Μονάδες 6**

- B3.** Αν  $g(x) = \ln x$ , να ορίσετε τη συνάρτηση  $f \circ g$ .

**Μονάδες 4**

- B4.** Έστω η συνάρτηση  $h(x) = \frac{1+\ln x}{x}$ ,  $x \geq 1$  και  $E$  το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $h$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x=1$ ,  $x=\lambda$  όπου  $\lambda > 1$ .

Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$  ώστε  $E = \frac{3}{2}$  τ.μ.

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x + x - \alpha$  με  $x \in \mathbb{R}$   $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- Γ1.** Να βρείτε την τετμημένη του σημείου της γραφικής παράστασης της  $f$  στο οποίο η εφαπτομένη(ε) διέρχεται από το σημείο  $M(\alpha, 0)$  και στην συνέχεια να δείξετε ότι η (ε) έχει μόνο ένα κοινό σημείο με την  $C_f$ .

**Μονάδες 5**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς μια λύση  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 4**

Αν  $x = x_0$  η λύση της εξίσωσης  $f(x) = 0$  τότε :

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι:  $e^{x_0} + 1 < e^{a-x_0} < e^a + 1$ .

**Μονάδες 6**

**Γ4.** Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  συνάρτηση  $g$  για την οποία ισχύει:

$$g(e^x) \leq g(a-x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

**α)** Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $g$  στο σημείο με τετμημένη  $x = e^{x_0}$ , όπου  $x_0$  του ερωτήματος Γ2 είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ .

**Μονάδες 5**

**β)** Αν επί πλέον δίνεται ότι η  $g$  είναι κοίλη, να μελετήσετε τη μονοτονία της  $g$ .

**Μονάδες 5**

### ΘΕΜΑ Δ

Αν για μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  ισχύει:

$$(f'(x) - x) \cdot e^{f(x) - \frac{x^2}{2}} + \eta\mu x = 0 \text{ για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ και } f(0) = 0, \text{ τότε :}$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \frac{x^2}{2} + \ln(\sin x)$ ,  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

**Μονάδες 5**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  μόνο στη θέση  $x = 0$  παρουσιάζει μέγιστο.

**Μονάδες 7**

**Δ3.** Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{f(x)}$

**Μονάδες 5**



**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2018**  
Β' ΦΑΣΗ

**Ε\_3.Μλ3ΘΟ(ε)**

Δ4. Να αποδείξετε ότι  $2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx > 1$

**Μονάδες 8**

ΟΕΦΕ