

ΤΑΞΗ: 3^η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Σάββατο 21 Απριλίου 2018
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Θεωρία σχολικού Βιβλίου Σελ. 86-87:
Στις περιπτώσεις που δίνεται διαφορετική βαρύτητα στις τιμές $x_1, x_2, \dots, x_v$ ενός συνόλου δεδομένων, τότε αντί του αριθμητικού μέσου χρησιμοποιούμε τον σταθμικό μέσο. Εάν σε κάθε τιμή $x_1, x_2, \dots, x_v$ δώσουμε διαφορετική βαρύτητα που εκφράζεται με τους λεγόμενους συντελεστές βαρύτητας $w_1, w_2, \dots, w_v$, τότε ο σταθμικός βρίσκεται από τον τύπο :

$$\bar{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_v w_v}{w_1 + w_2 + \dots + w_v} = \frac{\sum_{i=1}^v x_i w_i}{\sum_{i=1}^v w_i}$$

- A2.** Θεωρία σχολικού Βιβλίου Σελ. 31:
Έστω η συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$.

Έχουμε

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= (f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x)) = \\ &= f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x), \end{aligned}$$

και για $h \neq 0$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Επομένως

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

$$\text{Άρα } (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

A3. 1. Λ, 2. Λ, 3. Σ, 4. Σ, 4. Λ.

A4.

1. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} [k \cdot f(x)] = k \cdot \ell$.

2. $(\sin x)' = \cos x$.

3. $(cf(x))' = c \cdot f'(x)$.

4. $R = x_5 - x_1$

ΘΕΜΑ Β

B1. Αφού η γωνία είναι 90° έχουμε $\frac{v_3}{200} \cdot 360^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow v_3 = 50$ και άρα

$$f_3 \% = \frac{50}{200} \cdot 100 = 25\%.$$

$$\text{Ακόμα } f_1 \% + f_2 \% + f_3 \% + f_4 \% + f_5 \% = 100\% \Leftrightarrow f_5 \% = 100\% - 95\% = 5\%.$$

Άρα ο πίνακας γίνεται

Κλάσεις	κ_i	ν_i	f_i	$f_i\%$	N_i	F_i	$F_i\%$	$\nu_i \kappa_i$
0-20	10	60	0,30	30	60	0,30	30	600
20-40	30	40	0,20	20	100	0,50	50	1200
40-60	50	50	0,25	25	150	0,75	75	2500
60-80	70	40	0,20	20	190	0,95	95	2800
80-100	90	10	0,05	5	200	1	100	900
Σύνολο		200	1	100				8000

B2. Το ποσοστό των χρηστών που είναι μέχρι 40 ετών είναι 50%.

Το ποσοστό των χρηστών που είναι από 40 ως 80 ετών είναι

$$25\% + 20\% = 45\%.$$

- B3.** Επειδή θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις σε κάθε κλάση είναι ομοιόμορφα κατανομημένες έχουμε: Το πλήθος των χρηστών από 30 έως 60 είναι :

$$\frac{1}{2} \cdot 40 + 50 = 70.$$

Το πλήθος των χρηστών από 50 έως 70 είναι :

$$\frac{1}{2} \cdot 50 + \frac{1}{2} \cdot 40 = 45.$$

- B4.** Η μέση τιμή είναι $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 \kappa_i v_i}{v} = \frac{8000}{200} = 40.$

Για την διακύμανση έχουμε :

Κλάσεις	κ_i	v_i	$\kappa_i - \bar{x}$	$(\kappa_i - \bar{x})^2$	$v_i (\kappa_i - \bar{x})^2$
0-20	10	60	-30	900	54000
20-40	30	40	-10	100	4000
40-60	50	50	10	100	5000
60-80	70	40	30	900	36000
80-100	90	10	50	2500	25000
Σύνολο		200			124000

$$\text{Άρα } s^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 v_i (\kappa_i - \bar{x})^2}{v} = \frac{124000}{200} = 620 \Rightarrow s = \sqrt{620} \simeq 25$$

$$\text{Τέλος, } CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{25}{40} = 0,625 = 62,5\% > 10\%, \text{ δηλαδή δεν είναι ομοιογενές.}$$

ΘΕΜΑ Γ

- Γ1.** Πρέπει $x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$ και $\sqrt{x+3} - 2 \neq 0$

$$\text{Θα λύσουμε την εξίσωση } \sqrt{x+3} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 2$$

επειδή και τα δυο μέλη της ισότητας είναι μη αρνητικοί αριθμοί έχουμε διαδοχικά: $(\sqrt{x+3})^2 = 2^2 \Leftrightarrow x+3 = 4 \Leftrightarrow x=1.$ Άρα πρέπει $x \neq 1$

$$\text{Άρα } \Delta = [-3, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$\text{Είναι } A = \Delta \cup \{1\} = [-3, +\infty)$$

Γ2. Αφού η f διέρχεται από το σημείο $A(6,40)$ έχουμε $\frac{6^2 + \lambda \cdot 6 - 2}{\sqrt{6+3} - 2} = 40 \Leftrightarrow$
 $\frac{36 + 6\lambda - 2}{\sqrt{9} - 2} = 40 \Leftrightarrow \frac{34 + 6\lambda}{3 - 2} = 40 \Leftrightarrow 34 + 6\lambda = 40 \Leftrightarrow 6\lambda = 6 \Leftrightarrow \lambda = 1$

Γ3. Για $x \in \Delta$ έχουμε $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{\sqrt{x+3} - 2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{(x^2 + x - 2)(\sqrt{x+3} + 2)}{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)}$
 $\Leftrightarrow f(x) = \frac{(x^2 + x - 2)(\sqrt{x+3} + 2)}{(\sqrt{x+3})^2 - 2^2} \Leftrightarrow$

παραγοντοποίηση: $x^2 + x - 2 = 1 \cdot (x - 1)(x + 2)$

$x^2 + x - 2 = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$
 $\alpha_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

Άρα $f(x) = \frac{(x-1)(x+2)(\sqrt{x+3} + 2)}{x-1} = (x+2)(\sqrt{x+3} + 2)$

οπότε $f(x) = \begin{cases} (x+2)(\sqrt{x+3} + 2) & , x \in [-3, 1) \cup (1, +\infty) \\ a^2 - 3a + 14 & , x = 1 \end{cases}$

Αφού η f συνεχής στο $x_0 = 1$ πρέπει $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x+2)(\sqrt{x+3} + 2) = 3 \cdot 4 = 12$

Οπότε,

$a^2 - 3a + 14 = 12 \Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$

$\alpha_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$

Γ4. i. Είναι $f(x) = \begin{cases} (x+2)(\sqrt{x+3} + 2) & , x \in [-3, 1) \cup (1, +\infty) \\ 12 & , x = 1 \end{cases}$

Παρατηρούμε ότι από τον πρώτο κλάδο έχουμε $f(1) = 12$. Επομένως

$f(x) = (x+2)(\sqrt{x+3} + 2), x \geq -3$

Η f τέμνει τον x στο σημείο x_0 για το οποίο ισχύει :

$$f(x_0) = 0 \Leftrightarrow (x_0 + 2)(\sqrt{x_0 + 3} + 2) = 0$$

$$x_0 + 2 = 0 \text{ ή } \sqrt{x_0 + 3} + 2 = 0$$

$$x_0 = -2 \quad \sqrt{x_0 + 3} = -2 \text{ Αδύνατη.}$$

Άρα η C_f τέμνει τον x στο σημείο $(-2, 0)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= [(x+2)(\sqrt{x+3}+2)]' = (x+2)'(\sqrt{x+3}+2) + (x+2)(\sqrt{x+3}+2)' = \\ &= 1 \cdot (\sqrt{x+3}+2) + (x+2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+3}}(x+3)' = \sqrt{x+3}+2 + \frac{x+2}{2\sqrt{x+3}} \end{aligned}$$

$$f'(-2) = \sqrt{-2+3}+2 + \frac{-2+2}{2\sqrt{-2+3}} = \sqrt{1}+2+0 = 3$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης f στο σημείο $(-2, 0)$ είναι η :

$$y - 0 = 3(x - (-2))$$

$$y = 3x + 6$$

ii.

$$g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x+3}+2} + 2018 = \frac{(x+2)(\sqrt{x+3}+2)}{\sqrt{x+3}+2} + 2018 = 2018 + x + 2 = x + 2020$$

Είναι $g'(x) = 1$ για κάθε $x \geq -3$.

Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g σε οποιοδήποτε σημείο της $x_0 \geq -3$ σχηματίζει με τον x γωνία ω τότε : $g'(x_0) = \varepsilon\varphi\omega$

$$\varepsilon\varphi\omega = 1$$

$$\omega = 45^\circ$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αφού οι παρατηρήσεις ακολουθούν την κανονική κατανομή, έχουμε $\bar{x} = \delta = 8$.

Δ2. Θα υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης f .

$$f'(x) = \left(\frac{-x^3}{3}\right)' + \left(\frac{8x^2}{2}\right)' - (12x)' + (1)' = -x^2 + 8x - 12.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 8x - 12 = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \Leftrightarrow \Delta = 8^2 - 4(-1)(-12) \Leftrightarrow \Delta = 64 - 48 \Leftrightarrow \Delta = 16$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{16}}{2(-1)} \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-8 \pm 4}{-2}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2018
Β' ΦΑΣΗ

E_3.ΜΕΛ3Γ(α)

$$x_1 = 2 \text{ και } x_2 = 6$$

x	$-\infty$	2	6	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	-	
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	
		T.E	T.M	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2, 6]$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[6, +\infty)$

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = 2$ το :

$$f(2) = -\frac{2^3}{3} + 8\frac{2^2}{2} - 12 \cdot 2 + 1 = -\frac{8}{3} + 16 - 24 + 1 = -\frac{8}{3} - 7 = \frac{-8-21}{3} = -\frac{29}{3}$$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_2 = 6$ το :

$$f(6) = -\frac{6^3}{3} + 8\frac{6^2}{2} - 12 \cdot 6 + 1 = -72 + 144 - 72 + 1 = 1.$$

Άρα $s = 2$.

- Δ3.** Το ποσοστό των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα $(4, 6)$ που αντιστοιχεί στο $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$ είναι: $\frac{95-68}{2} = \frac{27}{2} = 13,5 \%$

και στο $(8, 10)$ αντιστοιχεί το $(\bar{x}, \bar{x} + s)$ και είναι: $\frac{68}{2} = 34 \%$

Οπότε συνολικά $47,5\%$ των παρατηρήσεων βρίσκονται στα δοσμένα διαστήματα.

Το μέγεθος του δείγματος είναι:

$$f_i = \frac{v_i}{v} \Leftrightarrow v = \frac{v_i}{f_i} \Leftrightarrow v = \frac{950}{\frac{47,5}{100}} = \frac{950}{0,475} = 2000$$

- Δ4.** Το ποσοστό των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα $(10, 12)$ που αντιστοιχεί στο $(\bar{x} + s, \bar{x} + 2s)$ είναι: $\frac{95-68}{2} = \frac{27}{2} = 13,5 \%$.

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι:

$$\frac{13,5}{100} \cdot 2000 = 0,135 \cdot 2000 = 270.$$

Δ5. Για να είναι το δείγμα ομοιογενές θα πρέπει $CV\% < 10\% \Rightarrow CV < 0,1$

Αν προσθέσουμε την ίδια σταθερά c σε κάθε τιμή μεταβλητής, θα έχουμε:

$s' = s$ και $\bar{x}' = \bar{x} + c$, οπότε:

$$CV < 0,1 \Leftrightarrow \frac{s'}{\bar{x}'} < 0,1 \Leftrightarrow \frac{s}{\bar{x} + c} < 0,1 \Leftrightarrow \frac{2}{8 + c} < 0,1 \Leftrightarrow \frac{2}{8 + c} - 0,1 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - 0,8 - 0,1c}{8 + c} < 0 \Leftrightarrow \frac{1,2 - 0,1c}{8 + c} < 0 \stackrel{8+c>0}{\Leftrightarrow} 1,2 - 0,1c < 0 \Leftrightarrow -0,1c < -1,2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c > \frac{-1,2}{-0,1} \Leftrightarrow c > 12.$$

ΟΕΦΕ