

ΤΑΞΗ: 3^η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Παρασκευή 5 Ιανουαρίου 2018
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$. Έχουμε:

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2$$

και για $h \neq 0$, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{2xh + h^2}{h}$. Επομένως:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} \stackrel{0}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h)}{h} = 2x + 0 = 2x.$$

Α2. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει: Τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1 , και τοπικό ελάχιστο στο $x_2 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_2)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_2 .

Α3.

1. Λ
2. Σ
3. Σ
4. Σ
5. Λ

A4.

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^v = \ell^v$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\ell}$
3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

ΘΕΜΑ Β

B1. $2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -1 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}, x \neq 0$. Άρα $A_f = \left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= [\eta\mu(x^2+9)]' - [\sqrt{2x+1}]' - \left(\frac{2}{x}\right)' = \cos(x^2+9) \cdot (x^2+9)' - \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} \cdot (2x+1)' - \left(-\frac{2}{x^2}\right)' \\ &= 2x \cdot \cos(x^2+9) - \frac{1}{\sqrt{2x+1}} + \frac{2}{x^2} = 2x \cdot \cos(x^2+9) - \frac{1}{\sqrt{2x+1}} + \frac{2}{x^2} \end{aligned}$$

B2. $f'(x) = \left[\frac{x^2}{x^2+1}\right]' = \frac{(x^2)' \cdot (x^2+1) - x^2 \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2x \cdot (x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} =$

$$= \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left[\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right]' = \frac{(2x)' \cdot (x^2+1)^2 - 2x \cdot [(x^2+1)^2]'}{[(x^2+1)^2]^2} = \frac{2 \cdot (x^2+1)^2 - 2x \cdot 2(x^2+1) \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^4} = \\ &= \frac{2 \cdot (x^2+1)^2 - 4x \cdot (x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{(x^2+1)[2(x^2+1) - 8x^2]}{(x^2+1)^4} = \frac{2x^2 + 2 - 8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{-6x^2 + 2}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2018
Α' ΦΑΣΗ

Ε_3.ΜΕΛ3Γ(α)

B3. $f'(x) = (\alpha x^3)' - (2x^2)' + (6x)' - (2)' = 3\alpha x^2 - 4x + 6$

Η γραφική παράσταση της f' διέρχεται από το $A(-1, 4)$. Άρα

$$f'(-1) = 4 \Leftrightarrow 3\alpha(-1)^2 - 4(-1) + 6 = 4 \Leftrightarrow 3\alpha + 4 + 6 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha = 4 - 6 - 4 \Leftrightarrow 3\alpha = -6 \Leftrightarrow \alpha = \frac{-6}{3} = -2$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Θα πρέπει $x \geq 0$.

Επίσης, θα πρέπει $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$.

Άρα $A_g = [0, 1) \cup (1, +\infty)$

Γ2.
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x\sqrt{x} - 1)(x\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(x + 1)(x\sqrt{x} + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x\sqrt{x})^2 - 1^2}{(x - 1)(x + 1)(x\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{(x - 1)(x + 1)(x\sqrt{x} + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)(x + 1)(x\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + x + 1)}{(x + 1)(x\sqrt{x} + 1)} = \frac{1^2 + 1 + 1}{(1 + 1)(1\sqrt{1} + 1)} = \frac{3}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}.$$

Γ3. $\lambda = f'(4)$

Για $x = 4$ έχουμε:

$$f'(x) = \left(\frac{x\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1} \right)' = \frac{(x\sqrt{x} - 1)' \cdot (x^2 - 1) - (x\sqrt{x} - 1) \cdot (x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} =$$

$$= \frac{(x\sqrt{x})' \cdot (x^2 - 1) - (x\sqrt{x} - 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{[(x)' \sqrt{x} + x(\sqrt{x})'] \cdot (x^2 - 1) - (x\sqrt{x} - 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} =$$

$$= \frac{\left[\sqrt{x} + x \frac{1}{2\sqrt{x}} \right] \cdot (x^2 - 1) - (x\sqrt{x} - 1) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(4) = \frac{\left[\sqrt{4} + 4 \frac{1}{2\sqrt{4}} \right] \cdot (4^2 - 1) - (4\sqrt{4} - 1) \cdot 2 \cdot 4}{(4^2 - 1)^2} = \frac{\left[2 + \frac{4}{2 \cdot 2} \right] \cdot (16 - 1) - (4 \cdot 2 - 1) \cdot 8}{(16 - 1)^2} =$$

$$= \frac{(2 + 1) \cdot 15 - 7 \cdot 8}{15^2} = \frac{45 - 56}{225} = -\frac{11}{225}$$

Γ4. Είναι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ (από Γ2 ερώτημα).

Επίσης:

$$f(1) = 225 \cdot \lambda \cdot 1 + \frac{47}{4} = 225 \cdot \left(-\frac{11}{225} \right) + \frac{47}{4} = -11 + \frac{47}{4} = -\frac{44}{4} + \frac{47}{4} = \frac{3}{4}$$

Παρατηρώ ότι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$. Άρα η f είναι συνεχής στο $x = 1$.

Γ5. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η: $y = \lambda x + \beta$, όπου $\lambda = -\frac{11}{225}$,

$$y = f(4) = \frac{4\sqrt{4} - 1}{4^2 - 1} = \frac{8 - 1}{16 - 1} = \frac{7}{15}$$

$$y = \lambda x + \beta \Leftrightarrow \frac{7}{15} = -\frac{11}{225} \cdot 4 + \beta \Leftrightarrow \beta = \frac{7}{15} + \frac{44}{225} \Leftrightarrow \beta = \frac{105 + 44}{225} = \frac{149}{225}$$

$$\text{Άρα η εξίσωση είναι η: } y = -\frac{11}{225}x + \frac{149}{225}$$

ΘΕΜΑ Α

Δ1. $f'(x) = (x^2 + 1)' \cdot (\kappa x + 2) + (x^2 + 1) \cdot (\kappa x + 2)' = 2x \cdot (\kappa x + 2) + (x^2 + 1) \cdot \kappa =$
 $= 2\kappa x^2 + 4x + \kappa x^2 + \kappa = 3\kappa x^2 + 4x + \kappa.$

Δ2. $f(0) = (0^2 + 1) \cdot (\kappa \cdot 0 + 2) = 1 \cdot 2 = 2$

$f(1) = (1^2 + 1) \cdot (\kappa \cdot 1 + 2) = 2 \cdot (\kappa + 2) = 2\kappa + 4$

$f'(-1) = 3\kappa(-1)^2 + 4 \cdot (-1) + \kappa = 3\kappa - 4 + \kappa = 4\kappa - 4$

$f'(1) = 3\kappa \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + \kappa = 3\kappa + 4 + \kappa = 4\kappa + 4$

$2f(0) + f'(-1) = f(1) + f'(1) \Leftrightarrow 2 \cdot 2 + 4\kappa - 4 = 2\kappa + 4 + 4\kappa + 4 \Leftrightarrow$

$4 + 4\kappa - 4 = 6\kappa + 8 \Leftrightarrow 4\kappa - 6\kappa = 8 \Leftrightarrow -2\kappa = 8 \Leftrightarrow \kappa = -4$

Δ3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) + 10x^2 + 2}{(\kappa + 5)x^2 - (-7 - 2\kappa)x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 \cdot (-4)x^2 + 4x - 4 + 10x^2 + 2}{(-4 + 5)x^2 - (-7 - 2(-4))x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-12x^2 + 4x + 10x^2 - 2}{x^2 - (-7 + 8)x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x^2 + 4x - 2}{x^2 - x} \quad (\text{Απροσδιόριστη Μορφή})$

Παραγοντοποίηση Αριθμητή: $-2x^2 + 4x - 2 = -2(x - 1)(x - 1)$, αφού η

εξίσωση $-2x^2 + 4x - 2 = 0$ έχει διπλή ρίζα την $x = 1$.

Παραγοντοποίηση Παρονομαστή: $x^2 - x = x(x - 1)$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x^2 + 4x - 2}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(x - 1)(x - 1)}{x(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(x - 1)}{x} = \frac{-2(1 - 1)}{1} = \frac{0}{1} = 0$

.

Δ4. Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως:

$2017 < 2018 \xrightarrow{\text{Η } f \text{ είναι γν.φθίνουσα}} f(2017) > f(2018).$

$\frac{1}{2018} < \frac{1}{2017} \xrightarrow{\text{Η } f \text{ είναι γν.φθίνουσα}} f\left(\frac{1}{2018}\right) > f\left(\frac{1}{2017}\right).$