



A1. Σελίδα 99

A2. α. Ψευδής

β. Η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ x, & x \leq 0 \end{cases}$ που είναι 1-1, αλλά όχι γνησίως μονότονη

(σελίδα 35 σχολικού βιβλίου).

A3. Σελίδα 216

A4. α. Λάθος

β. Λάθος

γ. Σωστό

δ. Σωστό

ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Είναι $f'(x) = 1 + \frac{8}{x^3}$, $x \neq 0$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{8}{x^3} = 0 \Leftrightarrow \frac{8}{x^3} = -1 \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -2$$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
f'		+	0	-	+
f					

τ. μέγιστο

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -2]$, γνησίως φθίνουσα στο $[-2, 0)$ και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ εφόσον είναι συνεχής στο -2.

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο -2 το $f(-2) = -2 - \frac{4}{(-2)^2} = -2 - \frac{4}{4} = -3$.

B2. $f''(x) = -\frac{24}{x^4}$, $x \neq 0$.

$$\text{Είναι } f''(x) = -\frac{24}{x^4} < 0, x \neq 0.$$

Άρα η f είναι κοίλη σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

$$\mathbf{B3.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x - \frac{4}{x^2} \right) = -\infty \quad \text{διότι} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(4 \cdot \frac{1}{x^2} \right) = +\infty \quad \text{καθώς} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

και $x^2 > 0$ κοντά στο 0.

Η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=0$ δηλαδή τον άξονα $y'y$.

Έστω $y=\lambda x+\beta$ η ασύμπτωτη της C_f .

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \frac{4}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{x^3} \right) = 1$$

$$\text{καθώς} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4 \cdot \frac{1}{x^3} \right) = 4 \cdot 0 = 0$$

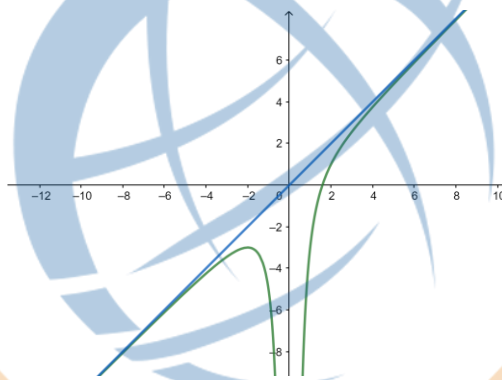
άρα $\lambda=1$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{4}{x^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{4}{x^2} \right) = 0$$

άρα $\beta=0$

Η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y=x$ στο $+\infty$. Όμοια για το $-\infty$.

B4.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Τα δύο τμήματα του σύρματος θα έχουν μήκος x m και $(8-x)$ m αντίστοιχα με

$0 < x < 8$. Το εμβαδό του τετραγώνου πλευράς $\frac{x}{4}$ είναι $E_T = \left(\frac{x}{4} \right)^2 = \frac{x^2}{16}$. Το μήκος

του κύκλου είναι $L=2\pi r$ δηλαδή $8-x=2\pi r$ άρα η ακτίνα του κύκλου είναι

$\rho = \frac{8-x}{2\pi}$. Το εμβαδό του κύκλου ακτίνας ρ είναι

$$E_K = \pi \cdot \rho^2 = \pi \left(\frac{8-x}{2\pi} \right)^2 = \pi \frac{64 - 16x + x^2}{4\pi^2} = \frac{64 - 16x + x^2}{4\pi}.$$

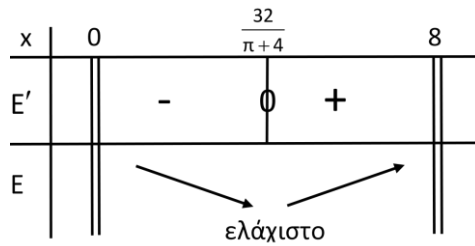
Τότε η συνάρτηση που δίνει το άθροισμα των εμβαδών τετραγώνου και κύκλου είναι

$$E(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{64 - 16x + x^2}{4\pi} = \frac{\pi x^2 + 256 - 64x + 4x^2}{16\pi}$$

$$\text{άρα } E(x) = \frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, x \in (0, 8).$$

Γ2. Είναι $E'(x) = \frac{2(\pi+4)x-64}{16\pi} = \frac{(\pi+4)x-32}{8\pi}$

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow (\pi+4)x - 32 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{32}{\pi+4}$$



Η Ε έχει ελάχιστο στο $\frac{32}{\pi+4}$.

Τότε η πλευρά του τετραγώνου είναι: $\frac{x}{4} = \frac{\frac{32}{\pi+4}}{4} = \frac{8}{\pi+4}$ και η διάμετρος του

$$\text{κύκλου } \delta = 2\rho = 2 \frac{8 - \frac{32}{\pi+4}}{2\pi} = \frac{8(\pi+4) - 32}{\pi(\pi+4)} = \frac{8\pi}{\pi(\pi+4)} = \frac{8}{\pi+4}.$$

Άρα η διάμετρος του κύκλου κι η πλευρά του τετραγώνου είναι ίσες.

Γ3. Αρκεί να δείξω ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $x_0 \in (0,8)$ τέτοιος ώστε $E(x_0) = 5$.

Η Ε είναι συνεχής στο $\Delta_1 = \left(0, \frac{32}{\pi+4}\right]$ και γνησίως φθίνουσα οπότε

$$E(\Delta_1) = \left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{x \rightarrow 0} E(x) \right] = \left[\frac{16}{\pi+4}, \frac{16}{\pi} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} E(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \frac{256}{16\pi} = \frac{16}{\pi} > 5$$

$$E\left(\frac{32}{\pi+4}\right) = \frac{(\pi+4)\left(\frac{32}{\pi+4}\right)^2 - 64 \frac{32}{\pi+4} + 256}{16\pi} = \frac{1024}{\pi+4} - \frac{2048}{\pi+4} + 256 =$$

$$= \frac{256 - 1024}{\pi+4} = \frac{256(\pi+4) - 1024}{16(\pi+4)\pi} = \frac{256\pi}{16(\pi+4)\pi} = \frac{16}{\pi+4} < 5$$

διότι $16 < 5\pi + 20 \Leftrightarrow -4 < 5\pi$ ισχύει.

Η Ε είναι συνεχής στο $\Delta_2 = \left[\frac{32}{\pi+4}, 8\right)$ και γνησίως αύξουσα άρα

$$E(\Delta_2) = \left[E\left(\frac{32}{\pi+4}\right), 8 \right) = \left[\frac{16}{\pi+4}, 4 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} E(x) = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi} = \frac{(\pi+4)8^2 - 64 \cdot 8 + 256}{16\pi} = \frac{64\pi}{16\pi} = 4$$

Άρα $5 \in E(\Delta_1)$ όμως $5 \notin E(\Delta_2)$ έτσι η $E(x) = 5$ έχει μοναδική λύση.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι $f'(x) = 2e^{x-\alpha} - 2x$, $x \in \mathbb{R}$ και $f''(x) = 2e^{x-\alpha} - 2$, $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Τότε } f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} - 2 = 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} = 2 \Leftrightarrow e^{x-\alpha} = 1 \Leftrightarrow x - \alpha = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} - 2 > 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} > 2 \Leftrightarrow e^{x-\alpha} > 1 \Leftrightarrow x - \alpha > 0 \Leftrightarrow x > \alpha$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} - 2 < 0 \Leftrightarrow 2e^{x-\alpha} < 2 \Leftrightarrow e^{x-\alpha} < 1 \Leftrightarrow x - \alpha < 0 \Leftrightarrow x < \alpha$$

Η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του α άρα το α είναι το μοναδικό σημείο καμπής.

Δ2.

Από την κυρτότητα στο Δ1 έχουμε ότι f' γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \alpha]$ και

f' γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, +\infty)$, οπότε η f' παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = \alpha$.

Το $f'(\alpha) = 2 - 2\alpha < 0$ αφού

$$\alpha > 1 \Rightarrow 2\alpha > 2 \Rightarrow 2 - 2\alpha < 0.$$

Η f' συνεχής και \downarrow στο $A_1 = (-\infty, \alpha]$ άρα $f'(A_1) = [f'(\alpha), \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x)] = [2 - 2\alpha, +\infty)$

αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^{x-\alpha} - 2x) = +\infty$ διότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^{x-\alpha} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x}{e^\alpha} = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x) = +\infty$

Η f' συνεχής και \uparrow στο $A_2 = [\alpha, +\infty)$ άρα $f'(A_2) = [f'(\alpha), \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)] = [2 - 2\alpha, +\infty)$

αφού

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^{x-\alpha} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^x \left(\frac{1}{e^\alpha} - \frac{x}{e^x} \right) = +\infty$ διότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^x = +\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{+\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$0 \in f'(A_1)$ και f' γν. φθίνουσα στο A_1 άρα υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (-\infty, \alpha)$ ώστε $f'(x_1) = 0$

$0 \in f'(A_2)$ και f' γν. αύξουσα στο A_2 άρα υπάρχει μοναδικό $x_2 \in (\alpha, +\infty)$ ώστε $f'(x_2) = 0$

$$\text{Για } x < x_1 \Rightarrow f'(x) > f'(x_1) = 0$$

$$x_1 < x \leq \alpha \Rightarrow f'(x) < f'(x_1) = 0$$

$$\text{Για } \alpha < x < x_2 \Rightarrow f'(x) < f'(x_2) = 0$$

$$x > x_2 \Rightarrow f'(x) > f'(x_2) = 0$$

x	$-\infty$	x_1	α	x_2	$+\infty$
f'	+	0	-	0	+
f	↗ τ. μεν.		↘ τ. ελάχ.		

Άρα η f παρουσιάζει ΤΜ στο x_1 και ΤΕ στο x_2

Δ3. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (α, x_2) και συνεχής άρα
 $f((\alpha, x_2)) = (f(x_2), f(\alpha))$ οπότε θα δείξουμε ότι $f(1) \notin (f(x_2), f(\alpha))$
 Ισχύει ότι $e^x \geq x+1, x \in \mathbb{R}$.

Για $x=1-\alpha$ έχουμε

$$e^{1-\alpha} \geq 2-\alpha \Rightarrow 2e^{1-\alpha} \geq 4-2\alpha \Rightarrow 2e^{1-\alpha} + \alpha^2 - 3 \geq 4-2\alpha + \alpha^2 - 3 \\ \Rightarrow 2e^{1-\alpha} + \alpha^2 - 3 \geq (\alpha-1)^2 > 0$$

για $\alpha \neq 1$ οπότε $2e^{1-\alpha} + \alpha^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow 2e^{1-\alpha} - 1 > 2 - \alpha^2 \Leftrightarrow f(1) > f(\alpha)$

Συνεπώς η εξίσωση είναι αδύνατη.

Δ4.

$$f(x) = 2e^{x-2} - x^2, x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 2e^{x-2} - 2x$$

$$f(2) = -2$$

$$f'(2) = 2 - 4 = -2$$

Η εξίσωση εφαπτομένης στο $(2, f(2))$ είναι

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2)$$

$$y + 2 = -2(x - 2)$$

$$y = -2x + 2$$

Από Δ1. ερώτημα για $\alpha=2$ έχουμε ότι η f είναι κυρτή στο $[2, +\infty)$.

Άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη με εξαίρεση την τμημένη του σημείο επαφής στο οποίο ισχύει η ισότητα

Άρα

$$f(x) \geq -2x + 2$$

$$f(x) \geq -2(x-1)$$

$$f(x)\sqrt{x-2} \geq -2(x-1)\sqrt{x-2}$$

Και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=2$. Άρα

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2} dx > \int_2^3 -2(x-1)\sqrt{x-2} dx$$

Θέτω

$$u = x - 2$$

$$du = dx$$

Για $x=2$ το $u=0$ και για $x=3$ το $u=1$.

$$\int_2^3 -2(x-1)\sqrt{x-2} dx = \int_0^1 -2(u+1)\sqrt{u} du = \\ = \int_0^1 \left(-2u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} \right) dx =$$

$$= \left[-\frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}u^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = -\frac{32}{15}$$

Άρα $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2} dx > -\frac{32}{15}$