Προτεινόμενες Απαντήσεις

Μαθηματικά Προσανατολισμού

9-6-2017

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σελίδα 253 σχολικού

Α2. α. Ψευδές

β. Αντιπαράδειγμα η $f(x)=|x|$ σελ. σχολικού 217.

Α3. Σελίδα 191 σχολικού.

Α2. α. Λ

β. Σ

γ. Λ

δ. Σ

ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για τις $f(x)=\ln x,\ x>0$ και $g(x)=\dfrac{x}{1-x},\ x\neq 1$, είναι

$$D_{fog}=\{x\in D_g\ |g(x)\in D_f\}$$

- $x\neq 1$
- $\dfrac{x}{1-x}>0\Leftrightarrow x(1-x)>0\Leftrightarrow x\in(0,1)$

Οπότε $x\in(0,1)$

Επομένως $D_{fog}=(0,1)$

Έτσι $(fog)(x)=f(g(x))=\ln\dfrac{x}{1-x}$, $x\in(0,1)$.

Β2. Η h είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $(0,1)$ με

$$h'(x)=(\ln x-\ln(1-x))'=\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}>0$$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x-\ln(1-x))=-\infty$,

$$\lim_{x\to 1^-}h(x)=\lim_{x\to 1^-}(\ln x-\ln(1-x))=\lim_{x\to 1^-}\ln x-\lim_{x\to 1^-}\ln(1-x)=0-\lim_{x\to 1^-}\ln(1-x)\overset{u=1-x}{=}\lim_{u\to o^+}\ln u=-\infty$$

$$h((0,1))=\left(\lim_{x\to 0^+}h(x),\lim_{x\to 1^-}h(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}.$$

Οπότε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι $D_{h_{-1}}=\mathbb{R}$

$$h(x)=y \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)=y \Leftrightarrow \frac{x}{1-x}=e^y \Leftrightarrow x=e^y-xe^y \Leftrightarrow x+xe^y=e^y$$

$$\Leftrightarrow \left(e^y+1\right)x=e^y \Leftrightarrow x=\frac{e^y}{e^y+1}$$

Οπότε $h^{-1}(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

B3. $\varphi(x)=\dfrac{e^x+1-1}{e^x+1}=1-\dfrac{1}{e^x+1}$

$\varphi'(x)=\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}>0$**,** άρα φ είναι γνησίως αύξουσα και δεν έχει ακρότατα.

$$\varphi''(x)=\frac{-e^{2x}+e^x}{\left(e^x+1\right)^3}=\frac{-e^x\left(e^x-1\right)}{\left(e^x+1\right)^3}$$

$$\varphi''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-e^x\left(e^x-1\right)}{\left(e^x+1\right)^3}=0 \Leftrightarrow e^x-1=0 \Leftrightarrow x=0$$

Προκύπτει ο παρακάτω πίνακας

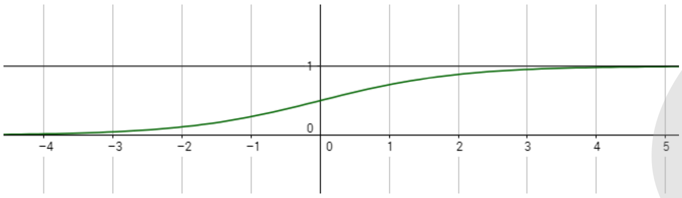
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi''(x)$	+	0	-
$\varphi(x)$	$\cup$	Σ.Κ.	$\cap$

Είναι $\varphi(0)=\dfrac{1}{2}$

Άρα η φ είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ κοίλη στο $[0,+\infty)$ και έχει σημείο καμπής το $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

B4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}=1$. Άρα η y=1 οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}=0$. Άρα η y=0 οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.



ΘΕΜΑ Γ

$f(x) = -ημx\,,\ x \in [0,π]\ \ A\left(\frac{π}{2}, -\frac{π}{2}\right)$

Γ1. $f'(x) = -συνx$

Έστω $M\left(x_0, f(x_0)\right)$ σημείο επαφής

$$ε: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$
$$y + ημx_0 = -συνx_0(x - x_0)$$
$$-\frac{π}{2} + ημx_0 = -συνx_0\left(\frac{π}{2} - x_0\right)$$

Αρκεί ν.δ.ο. η εξίσωση $ημx - x\cdot συνx + \frac{π}{2}συνx - \frac{π}{2} = 0$ έχει 2 ακριβώς ρίζες στο $[0,π]$

$g(x) = ημx - x\cdot συνx + \frac{π}{2}συνx - \frac{π}{2}\,,\ x \in [0,π]$

$g(0) = 0\,,\ g(π) = +π - π = 0$ (προφανείς ρίζες)

$g'(x) = \cancel{συνx} - \cancel{συνx} + x\cdot ημx - \frac{π}{2}ημx = ημx\left(x - \frac{π}{2}\right)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = \frac{π}{2}$ ή $x = π$

x	0		$\frac{π}{2}$		$π$
$g'(x)$	0	-	0	+	0
$g(x)$		↘		↗	

Η g στο $\left[0, \frac{π}{2}\right]$ είναι γν. φθίνουσα άρα για κάθε $x \in \left(0, \frac{π}{2}\right]$ είναι

$g(0) > g(x) \Rightarrow g(x) < 0$

και g στο $\left[\frac{π}{2}, π\right]$ είναι γν. αύξουσα άρα για κάθε $x \in \left[\frac{π}{2}, π\right)$ είναι

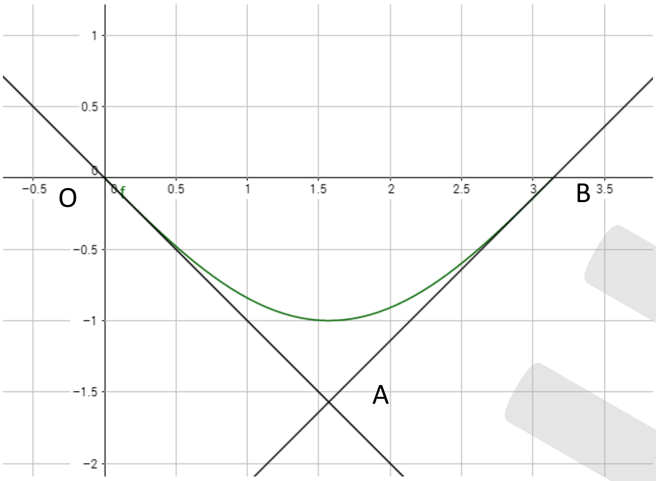
$g(x) < g(π) \Rightarrow g(x) < 0$

Οπότε οι προφανείς ρίζες είναι μοναδικές.

Στο (0,0): $ε_1$: $y = -x$

Στο (π,0): $ε_2$: $y = x - π$

Γ2.



$$E_2=\int_0^{\pi}\left(-f\left(x\right)\right)dx=\int_0^{\pi}\eta\mu x dx=\left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}=2 \quad \tau.\mu.$$

$$E_1=\left(OAB\right)-E_1=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\frac{\pi}{2}-2=\frac{\pi^2}{4}-2 \quad \tau.\mu.$$

Άρα $\dfrac{E_1}{E_2}=\dfrac{\frac{\pi^2}{4}-2}{2}=\dfrac{\pi^2}{8}-1$

Γ3.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}=\lim_{x\to\pi}\left[\left(f(x)+x\right)\cdot\frac{1}{f(x)-(x-\pi)}\right]=+\infty$$

Διότι $\lim\limits_{x\to\pi}\left(f(x)+x\right)=\pi$ και $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1}{f(x)-\left(x-\pi\right)}=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to\pi}\left[f(x)-(x-\pi)\right]=0$ και η f είναι κυρτή άρα $f(x)-\left(x-\pi\right)>0$ κοντά στο π.

Γ4. Η f είναι κυρτή άρα $f(x)\ge x-\pi$ για κάθε $x\in\left[0,\pi\right]$. Άρα για $x\in\left[1,e\right]$ είναι

$$f(x)>x-\pi\Rightarrow\frac{f(x)}{x}>1-\frac{\pi}{x}$$

Άρα $$\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>\int_1^e\left(1-\frac{\pi}{x}\right)dx\Rightarrow\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx>e-1-\pi$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^4} & ,x\in\left[-1,0\right)\\ e^x\eta\mu x & ,x\in\left[0,\pi\right]\end{cases}$

Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $\left[-1,0\right)$ και $\left(0,\pi\right]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f\left(0\right)=0$, άρα η f συνεχής στο 0.

Για $x\in\left[-1,0\right)$ είναι $f'\left(x\right)=\left(\left|x\right|^{\frac{4}{3}}\right)'=\left(\left(-x\right)^{\frac{4}{3}}\right)'=-\dfrac{4}{3}\left(-x\right)^{\frac{1}{3}}=-\dfrac{4\sqrt[3]{-x}}{3}<0$

Για $x\in\left(0,\pi\right]$ είναι $f'\left(x\right)=e^x\eta\mu x+e^x\sigma\upsilon\nu x=e^x\left(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\right)$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt[3]{x^4}}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x\sqrt[3]{-x}}{x}=\lim_{x\to0^-}x=0$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^x\eta\mu x}{x}=1\cdot1=1$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, οπότε το 0 είναι κρίσιμο σημείο.

Ορόσημο

Για $x \in [-1,0)$ είναι $f'(x) > 0$,

για $x \in (0,\pi]$ είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow ημx = -συνx \Leftrightarrow εφx = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4}$

Οπότε η f έχει κρίσιμα σημεία τα x=0 και $x = \frac{3\pi}{4}$

Δ2.

x	-1		0		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$		-	‖	+	0	-	
$f(x)$		↘		↗		↘	

Η f έχει τοπικό μέγιστο στο -1 με τιμή $f(-1) = 1$,

τοπικό ελάχιστο στο 0 με τιμή $f(0) = 0$,

τοπικό μέγιστο στο $\frac{3\pi}{4}$ με τιμή $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = e^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}$ και

τοπικό ελάχιστο στο π με τιμή $f(\pi) = 0$

$$A_1 = f([-1,0]) = [f(0), f(-1)] = [0,1]$$

$$A_2 = f\left(\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]\right) = \left[f(0), f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = \left[0, e^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$A_3 = f\left(\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]\right) = \left[f(\pi), f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] = \left[0, e^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

Αφού $\frac{3\pi}{4} > 1 \Rightarrow e^{\frac{3\pi}{4}} > e \Rightarrow e^{\frac{3\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} > \frac{e\sqrt{2}}{2} > 1$ και $f([-1,\pi]) = A_1 \cup A_2 \cup A_3$

θα είναι $f([-1,\pi]) = \left[0, e^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

Δ3.

$$E(\Omega) = \int_0^\pi |f(x) - g(x)|dx = \int_0^\pi \left|e^x ημx - e^{5x}\right|dx$$
$$= \int_0^\pi \left|e^{5x} - e^x ημx\right|dx = \int_0^\pi e^x\left|e^{4x} - ημx\right|dx$$

Για $x \in [0,\pi]$

$0 \le \eta\mu x \le 1$

$0 \le x \le \pi \Rightarrow 0 \le 4x \le 4\pi \Rightarrow 1 \le e^{4x} \le e^{4\pi}$

Άρα $e^{4x} - \eta\mu x \ge 0$.

Οπότε

$$E(\Omega) = \int_0^\pi e^x \left(e^{4x} - \eta\mu x\right)dx = \int_0^\pi \left(e^{5x} - e^x\eta\mu x\right)dx = \int_0^\pi e^{5x}dx - \int_0^\pi e^x\eta\mu x dx =$$

$$= \left[\frac{e^{5x}}{5}\right]_0^\pi - \frac{e^\pi + 1}{2} = \frac{e^{5\pi}}{5} - \frac{1}{5} - \frac{e^\pi + 1}{2} = \frac{e^{5\pi} - 1}{5} - \frac{e^\pi + 1}{2} \text{ τ.μ.}$$

Δ4.

$$16e^{-\frac{3\pi}{4}} f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}} \left(4x - 3\pi\right)^2 = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow 16f(x) - \left(4x - 3\pi\right)^2 = 8\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow$$

$$f(x) - \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow f(x) = \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow f(x) = \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2 + f_{max}$$

$f\left(x\right) - f\left(\frac{3\pi}{4}\right) \le 0 \le \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)^2$ και η ισότητα ισχύει μόνο για το $x = \frac{3\pi}{4}$

Άρα $x = \frac{3\pi}{4}$