Μαθηματικά Προσανατολισμού

18-5-2016

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 262

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 141

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ 246-247

Α4. **α.** Λάθος

β. Σωστό

γ. Λάθος

δ. Σωστό

ε. Σωστό

Θέμα Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη και συνεχής σρο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(x)=\frac{(x^2)'(x^2+1)-x^2(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{2x(x^2+1)-x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

Είναι $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}\geq 0 \overset{(x^2+1)^2>0}{\Leftrightarrow} 2x\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 0$.

Άρα $f'(x)<0$ στο $(-\infty,0)$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$,

$f'(x)>0$ στο $(0,+\infty)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και

έχει ελάχιστη τιμή για x=0 το $f(0)=\dfrac{0^2}{0^2+1}=0$.

Β2. Η f' είναι παραγωγίσιμη με

$$f''(x)=\frac{(2x)'(x^2+1)^2-2x\left((x^2+1)^2\right)'}{(x^2+1)^4}=\frac{2(x^2+1)^2-4x(x^2+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^4}=$$

$$=\frac{2(x^2+1)^2-8x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4}=\frac{(x^2+1)(2x^2+2-8x^2)}{(x^2+1)^4}=\frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3}$$

Είναι $f''(x)\ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{2-6x^2}{\left(x^2+1\right)^3}\ge 0 \overset{\left(x^2+1\right)^3>0}{\Leftrightarrow} 6x^2\le 2 \Leftrightarrow x^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow |x|\le \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\le x\le \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

x	$+\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f''(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$			σ.κ $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$		σ.κ $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$		

Οπότε η f κοίλη στα διαστήματα $\left(-\infty,-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$ και $\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}},+\infty\right)$, ενώ είναι κυρτή στο $\left[-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$. Έτσι έχει σημεία καμπής τα $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$ και $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$.

Αφού $f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{1}{4}$ θα είναι τα σημεία $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{4}\right)$ και $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{4}\right)$.

B3. Εφόσον το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$ δε θα παρουσιάζει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Στο $+\infty$ είναι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x\left(x^2+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

Άρα $\lambda_1=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda_1 x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$. Άρα $\beta_1=1$.

Στο $+\infty$ επομένως η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την y=1.

Στο $-\infty$ είναι:

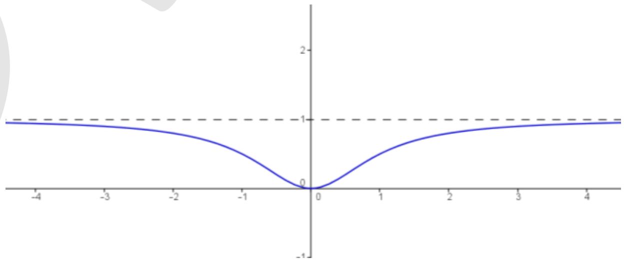
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^3+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x\left(x^2+1\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

Άρα $\lambda_2=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-\lambda_2 x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$. Άρα $\beta_2=1$.

Στο $-\infty$ επομένως η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την y=1.

B4.



Θέμα Γ

Γ1. Γνωρίζουμε ότι $\ln x \le x-1$ για κάθε x>0 με το ίσον να ισχύει μόνο για x=1. θέτοντας $x=e^y$ με $y\in\mathbb{R}$ καταλήγουμε στην ανίσωση $e^y \ge y+1$ (1) το ίσον να ισχύει μόνο για y=0. θέτοντας όπου $y=x^2$ στην (1) παίρνουμε $e^{x^2}\ge x^2+1$ με το ίσον να ισχύει μόνο για x=0, άρα η εξίσωση μας έχει μοναδική λύση το x=0.

Γ2. Έχουμε $e^{x^2}\ge x^2+1$ με το ίσον να ισχύει μόνο για x=0. Άρα η f(x) μοναδική ρίζα το x=0.

Για $x\ne 0$, $e^{x^2}>x^2+1$, αφού $f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2$ θα έχουμε ότι $f(x)\ne 0$

Η f είναι συνεχής οπότε θα διατηρεί σταθερό πρόσημο δηλαδή $f(x)<0$ ή $f(x)>0$.

Ειδικότερα:

Αν $x>0$ έχουμε τις περιπτώσεις: $f(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)$ ή $f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)$

Αν $x<0$ έχουμε τις περιπτώσεις: $f(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)$ ή $f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)$

$$f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1, & x\ge 0\\ -e^{x^2}+x^2+1, & x<0\end{cases} \text{ ή } f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1, & x\ge 0\\ e^{x^2}-x^2-1, & x<0\end{cases},$$

δηλαδή

$$f(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right),\ x\in\mathbb{R},\text{ ή } f(x)=\begin{cases} -e^{x^2}+x^2+1, & x\ge 0\\ -e^{x^2}+x^2+1, & x<0\end{cases}$$

δηλαδή

$$f(x)=\left(-e^{x^2}+x^2+1\right),\ x\in\mathbb{R}\ \text{ ή }\ f(x)=\begin{cases} -e^{x^2}+x^2+1, & x\ge 0\\ e^{x^2}-x^2-1, & x<0\end{cases}$$

Γ3. Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$$f'(x)=2xe^{x^2}-2x,\ x\in\mathbb{R}$$

Η f' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$$f''(x)=2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}-2,\ x\in\mathbb{R}$$

Προφανής ρίζα είναι το 0

Η f'' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$$f'''(x)=2xe^{x^2}(4x^2+5),\ x\in\mathbb{R}$$

$f'''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$. Ακολουθεί ο πίνακας :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'''(x)$	-	0	+
$f''(x)$	↘		↗

Οπότε $f''(x)\geq f''(0)=0$ με την ισότητα να ισχύει μόνα για x = 0. Άρα η f κυρτή στο $\mathbb{R}$

Γ4. Θεωρούμε $F(x)=f(x+3)-f(x)$. Η F παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με $F'(x)=f'(x+3)-f'(x),\ x\in\mathbb{R}$

Όμως η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αφού η f κυρτή στο $\mathbb{R}$

Είναι: $x+3>x \Rightarrow f'(x+3)>f'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα $F'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε η F είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και άρα 1-1. Η αρχική εξίσωση γράφεται :

$$F(|ημx|)=F(x) \Leftrightarrow |ημx|=x$$

Από γνωστή ανίσωση, η μοναδική λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι η x = 0

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι

$$\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)ημxdx=\int_0^{\pi}f(x)ημxdx+\int_0^{\pi}f''(x)ημxdx=$$

$$=\int_0^{\pi}f(x)(-συνx)'dx+\int_0^{\pi}\left(f'(x)\right)'ημxdx=$$

$$=\left[-συνx\cdot f(x)\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}f'(x)συνxdx+\left[f'(x)ημx\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}f'(x)συνxdx=$$

$$=\left[-συνx\cdot f(x)\right]_0^{\pi}+\left[f'(x)ημx\right]_0^{\pi}$$

Όμως

$$\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)ημxdx=\pi \Leftrightarrow \left[-συνx\cdot f(x)\right]_0^{\pi}+\left[f'(x)ημx\right]_0^{\pi}=\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -συν\pi\cdot f(\pi)+συν0\cdot f(0)+f'(\pi)ημ\pi-f'(0)ημ0=\pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(\pi)+f(0)=\pi \qquad (1)$$

Για x κοντά στο 0 είναι $f(x)=\dfrac{f(x)}{ημx}\cdot ημx$.

Οπότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{ημx}\cdot ημx\right) = 1\cdot ημ0 = 0$ και αφού η f είναι παραγωγίσιμη θα εί-ναι συνεχής, δηλαδή $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

Έτσι από (1) προκύπτει $f(\pi) + 0 = \pi \Leftrightarrow f(\pi) = \pi$.

Για x κοντά στο 0 είναι:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)}{ημx}\cdot\frac{ημx}{x}, \text{ οπότε}$$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{ημx}\cdot\frac{ημx}{x}\right) = 1\cdot 1 = 1$$

Δ2.

α) Είναι $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$, με $x\in\mathbb{R}$.

Τότε $e^{f(x)}\cdot f'(x) + 1 = f'(f(x))\cdot f'(x) + e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

Έστω ότι υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$, ώστε $f'(x_0) = 0$, τότε

$$e^{f(x_0)}\cdot f'(x_0) + 1 = f'(f(x_0))\cdot f'(x_0) + e^{x_0} \Leftrightarrow e^{f(x_0)}\cdot 0 + 1 = f'(f(x_0))\cdot 0 + e^{x_0} \Leftrightarrow$$
$$e^{x_0} = 1 \Leftrightarrow x_0 = 0$$

Οπότε $f'(x_0) = f'(0) = 0$, άτοπο.

Αφού η f' παραγωγίσιμη άρα συνεχής θα διατηρεί πρόσημο. Δηλαδή

$f'(x) > 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή $f'(x) < 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, όπου και στις δυο περιπτώσεις είναι γνησίως μονότονη άρα δεν παρουσιάζει ακρότατα.

β) Επειδή $f(0) = 1$ και η f' διατηρεί πρόσημο θα είναι $f'(x) > 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

Δ3. Αφου η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα είναι

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x\to -\infty} f(x), \lim_{x\to +\infty} f(x)\right) \text{ και } f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}, \text{ θα είναι } \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Οπότε $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Όμως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $-1 \le ημx \le 1$ και $-1 \le συνx \le 1$, οπότε αθροίζοντας κατά μέλη προκύπτει

$-2 \le ημx + συνx \le 2$

Αφού $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ είναι $f(x) > 0$ κοντά στο $+\infty$, οπότε $-\dfrac{2}{f(x)} \le \dfrac{ημx + συνx}{f(x)} \le \dfrac{2}{f(x)}$

Είναι $\lim_{x \to +\infty}\left(-\dfrac{2}{f(x)}\right) = \lim_{x \to +\infty}\left(\dfrac{2}{f(x)}\right) = 0$. Από κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{ημx + συνx}{f(x)} = 0$$

Δ4.

$$1 \le x \le e^{\pi} \Leftrightarrow 0 \le \ln x \le \pi \overset{f\,γν.αύξουσα}{\Leftrightarrow} f(0) \le f(\ln x) \le f(\pi)$$
$$\Leftrightarrow 0 \le f(\ln x) \le \pi \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 0 \le \frac{f(\ln x)}{x} \le \frac{\pi}{x}$$

Ολοκληρώνοντας κατά τα γνωστά στις ανισότητες και επειδή οι ισότητες ισχύουν σε συγκεκριμένες τιμές προκύπτει:

$$1 \le x \le e^{\pi} \Leftrightarrow 0 \le \ln x \le \pi \overset{f\ γν.αύξουσα}{\Leftrightarrow} f(0) \le f(\ln x) \le f(\pi)$$
$$\Leftrightarrow 0 \le f(\ln x) \le \pi \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 0 \le \frac{f(\ln x)}{x} \le \frac{\pi}{x}$$

Ολοκληρώνοντας χρησιμοποιώντας τις γνωστές ιδιότητες των ολοκληρωμάτων και αφού το $\dfrac{f(\ln x)}{x}$ μηδενίζει μόνο για συγκεκριμένες τιμές προκύπτει:

$$0 < \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}dx < \pi\int_1^{e^{p}} \frac{1}{x}dx \Leftrightarrow 0 < \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}dx < \pi\left[\ln x\right]_1^{e^{\pi}}$$

$$\Leftrightarrow 0 < \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}dx < \pi^2$$