Μαθηματικά ΕΠΑΛ (Παλαιό σύστημα)

19-5-2016

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελ. 64 σχολικού βιβλίου

Α2. α) ΣΩΣΤΟ

β) ΛΑΘΟΣ

γ) ΛΑΘΟΣ

δ) ΛΑΘΟΣ

ε) ΣΩΣΤΟ

Α3.

α) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

β) $\int_\alpha^\beta 1dx=[x]_\alpha^\beta=\beta-\alpha$

γ) $f_1+f_2+\ldots+f_\kappa=1$

ΘΕΜΑ Β

Β1.

x_i	v_i	N_i	f_i %	x_iv_i
0	5	5	20	0
1	4	9	16	4
2	7	16	28	14
3	4	20	16	12
4	5	25	20	20
Σύνολα	25		100	50

Ισχύει $v_i=N_i=5$ και $v_i=N_i-N_{i-1}$

Άρα $v_2=4$, $v_3=7$, $v_4=4$. Επιπλέον $N_5=v=25$ άρα $v_5=5$

Από τον τύπο $f_i\%=\frac{v_i}{v}100$ προκύπτει

$$f_1\%=\frac{5}{25}100=20$$
$$f_2\%=\frac{4}{25}100=16$$
$$f_3\%=\frac{7}{25}100=28$$
$$f_4\%=\frac{4}{25}100=16$$
$$f_5\%=\frac{5}{25}100=20$$

B2.

$$\overline{x}=\frac{x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3+x_4v_4+x_5v_5}{v}=\frac{50}{25}=2$$

B3.

Το σύνολο ν του δείγματος είναι περιττός αριθμός άρα ισχύει $\delta=t_{13}=2$ (Η 13^{η} παρατήρηση έχει τιμή 2)

B4.

$$S^2=\frac{\left(\overline{x}-x_1\right)^2v_1+\left(\overline{x}-x_2\right)^2v_2+\left(\overline{x}-x_3\right)^2v_3+\left(\overline{x}-x_4\right)^2v_4+\left(\overline{x}-x_5\right)^2v_5}{v}=$$
$$=\frac{(2-0)^2 5+(2-1)^2 4+(2-2)^2 7+(2-3)^2 4+(2-4)^2 5}{25}=$$
$$=\frac{4\cdot5+1\cdot4+0\cdot7+1\cdot4+4\cdot5}{25}=\frac{20+4+0+4+20}{25}=\frac{48}{25}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με:

$$f'(x)=3x^2-6x-9$$

Γ2.

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-6x-9=0 \Rightarrow x^2-2x-3=0$$
$$\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)=4+12=16>0$$
$$x_{1,2}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm 4}{2}=\begin{cases}x_1=-1\\ x_2=3\end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-1]$ και $[3,+\infty)$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,3]$

Άρα παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο -1 το
$f(-1)=(-1)^3-3(-1)^2-9(-1)+2=-1-3+9+2=7$

και παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο 3 το
$f(3)=3^3-3\cdot 3^2-9\cdot 3+2=27-27-27+2=-25$

Γ3.

Έστω $g(x)-h(x)=3x^2-(6x+9)=3x^2-6x-9$

Παρατηρώ από ερώτημα Γ2 ότι $f'(x)=g(x)-h(x)$

Άρα $g(x)-h(x)<0$ για $x\in[-1,3]$

Επομένως το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g(x) και f(x) είναι:

$$E(\Omega)=\int_{-1}^{3}|g(x)-h(x)|dx=\int_{-1}^{3}(h(x)-g(x))dx=\int_{-1}^{3}(6x+9-3x^2)dx=$$
$$\left[3x^2+9x-x^3\right]_{-1}^{3}=3\cdot 3^2+9\cdot 3-3^3-\left[3\cdot(-1)^2+9\cdot(-1)-(-1)^3\right]=$$
$$27+27-27-(3-9+1)=27+5=32 \text{ τ.μ.}$$

Ακρότατα

- Στο $x_1 = -1$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο με τιμή

$$f(-1) = \frac{-1}{\left((-1)^2+1\right)^2} + \frac{1}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2} = 0$$

- Στο $x_1 = -1$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο με τιμή

$$f(1) = \frac{1}{\left(1^2+1\right)^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Γ4. Οι αριθμοί 2015, 2016 ανήκουν στο διάστημα $[1,+\infty)$, στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα : $2015 < 2016 \Rightarrow f(2015) > f(2016)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1-x^2}{\sqrt{x}-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1^-} \frac{(1-x)(1+x)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-(x-1)(1+x)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)} =$$
$$= -(1+1)(\sqrt{1}+1) = -2\cdot 2 = -4$$

Δ2.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (\alpha x^2 + \beta x) = \alpha\cdot 1^2 + \beta\cdot 1 = \alpha+\beta$$

Δ3. Εφόσον υπάρχει το $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ τότε $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow \alpha+\beta = -4 (1)$

Η *f* είναι παραγωγίσιμη για $x \in (-1,+\infty)$ με $f'(x) = 2\alpha x + \beta$

Τότε $f'(2) = 2 \Rightarrow 2\alpha\cdot 2 + \beta = 2 \Rightarrow 4\alpha + \beta = 2 (2)$

Από τις σχέσεις (1) και (2)

$$\begin{cases} \alpha+\beta = -4 & \cdot(-1) \\ 4\alpha+\beta = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\alpha-\beta = 4 \\ 4\alpha+\beta = 2 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 3\alpha = 6 \Rightarrow \alpha = 2$$

Άρα αντικαθιστώντας στην (1) α=2 ισχύει: $2+\beta = -4 \Rightarrow \beta = -6$.