ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ
ΟΡΟΣΗΜΟ

Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης

2-6-2014

Θέμα Α

Α1. Σελ.251 Σχολικού Βιβλίου

Α2. Σελ.273 Σχολικού Βιβλίου

Α3. Σελ.150 Σχολικού Βιβλίου

Α4. α. Λ

β. Σ

γ) Σ

δ) Σ

ε) Λ

Θέμα Β

Β1. Αν $z=x+yi$, με $x,y\in\mathbb{R}$ τότε έχουμε

$$2|z|^2+(z+\bar{z})i-4-2i=0 \Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2xi-4-2i=0 \Leftrightarrow (2x^2+2y^2-4)+(2x-2)i=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2=0 \Leftrightarrow x=1 \\ 2x^2+2y^2-4=0 \Leftrightarrow 2y^2=2 \Leftrightarrow y=\pm 1 \end{cases}$$

Άρα $z_1=1+i$ και $z_2=1-i$

Β2. Κάνοντας την πράξη έχουμε $\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i+i^2}{2}=i$, οπότε

$$w=3\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{39}=3i^{39}=3i^3=-3i$$

Β3. Από την αρχική σχέση και αφού $z_1=1+i$, $z_2=1-i$ και $w=-3i$

$$|u+w|=|4z_1-z_2-i| \Leftrightarrow |u-3i|=|4(1+i)-(1-i)-i| \Leftrightarrow$$
$$|u-3i|=|4+4i-1+i-i| \Leftrightarrow |u-3i|=|3+4i| \Leftrightarrow$$
$$|u-(0+3i)|=5$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο Κ(0,3) και ρ=5

Θέμα Γ

Γ1. Η $h(x)=x-\ln(e^x+1),\ x\in\mathbb{R}$ είναι συνεχής και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$h'(x)=1-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}=\frac{1}{e^x+1}>0 \text{ και}$$

$$h''=-\frac{1}{(e^x+1)^2}e^x<0, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Άρα η h είναι κοίλη.

Γ2. Είναι

$$e^{h(2h'(x))}<\frac{e}{e+1}\Leftrightarrow \ln e^{h(2h'(x))}<\ln\frac{e}{e+1}\Leftrightarrow h(2h'(x))<\ln e-\ln(e+1)\Leftrightarrow h(2h'(x))<h(1).$$

$2h'(x)<1$, γιατί h γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ κι άρα $1-1$

$$h'(x)<\frac{1}{2}\Leftrightarrow \frac{1}{e^x+1}<\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2<e^x+1\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow e^x>e^0\Leftrightarrow x>0$$

Γ3. Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-\ln(e^x+1))=\lim_{x\to+\infty}(\ln e^x-\ln(e^x+1))=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{e^x}{e^x+1}=\lim_{u\to 1}\ln u=0, \text{ διότι}$$

$$\text{Αν } u=\frac{e^x}{e^x+1} \text{ τότε}$$

$$u_0=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}\overset{\infty/\infty}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(e^x+1)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$$

Άρα η y=0 οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο $+\infty$.

Επίσης

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\ln(e^x+1)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{\ln(e^x+1)}{x}\right)=1,$$

γιατί $\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(e^x+1)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left[\ln(e^x+1)\cdot\frac{1}{x}\right]=0\cdot 0=0$

άρα λ=1

και $\lim_{x\to-\infty}(h(x)-x)=\lim_{x\to-\infty}(x-\ln(e^x+1)-x)=0$

άρα β=0.

οπότε y=x πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο $-\infty$

Γ4. Για την $\varphi(x)=e^x(h(x)+\ln 2),\ x\in\mathbb{R}$, έχουμε

$$\phi(x)\ge 0 \Leftrightarrow h(x)+\ln 2\ge 0 \Leftrightarrow x-\ln(e^x+1)+\ln 2\ge 0 \Leftrightarrow \ln\frac{e^x}{e^x+1}\ge -\ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\ln\frac{e^x}{e^x+1}\ge \ln 2^{-1} \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x+1}\ge\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2e^x\ge e^x+1 \Leftrightarrow e^x\ge 1\Leftrightarrow x\ge 0$$

Άρα

$$E(\Omega)=\int_0^1\phi(x)dx=\int_0^1 e^x\ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)dx=\left[e^x\ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)\right]_0^1-\int_0^1 e^x\left(\frac{e^x+1}{2e^x}\right)\frac{2e^x(e^x+1)-2e^xe^x}{(e^x+1)^2}dx=$$

$$=\left[e^x\ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)\right]_0^1-\int_0^1\frac{2e^x}{2(e^x+1)}dx=\left[e^x\ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)\right]_0^1-\left[\ln(e^x+1)\right]_0^1=$$

$$=\left(e\ln\frac{2e}{e+1}-1\ln 1\right)-\left(\ln(e+1)-\ln 2\right)=e\ln\frac{2e}{e+1}-\ln\frac{e+1}{2}\ \text{τ.μ.}$$

Θέμα Δ

Δ1. Για να είναι η f συνεχής στο $x_0=0$ πρέπει $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$.

Όμως $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\phi'(0)=1$ όπου $\phi(x)=e^x$

Για $x\neq 0$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2}$

Θεωρώ $h(x)=xe^x-e^x+1,\ x\in\mathbb{R}$ με προφανή λύση $x=0$

Η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x)=xe^x$

Ο πίνακας μεταβολών της h είναι ο παρακάτω

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	↘		↗

Άρα για κάθε $x\neq 0$ είναι $h(x)>0$ οπότε $f'(x)>0$ και αφού η f είναι συνεχής στο 0 θα είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Δ2.

α. Θεωρούμε την $G(x)=\int_1^x f(u)du$ τότε η εξίσωση γράφεται $G(2f'(x))=G(1)$

Η G είναι παραγωγίσιμη αφού η f είναι συνεχής με $G'(x)=f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
Διότι η f είναι γνησίως αύξουσα και

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(e^x-1\right)\cdot\dfrac{1}{x}\right]=0$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-1\right)=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι

$$f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=\left(0,\lim_{x\to+\infty}f(x)\right).$$

Θα είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}\underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\dfrac{1}{2}\varphi'(0)=\dfrac{1}{2}$, οπότε $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

Η G είναι γνησίως αύξουσα, δηλ. 1-1, οπότε

$G(2f'(x))=G(1)\Leftrightarrow 2f'(x)=1\Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow f'(x)=f'(0)\Leftrightarrow x=0$ μοναδική διότι η f' είναι γνησίως αύξουσα (f κυρτή).

β. Αναζητούμε χρονική στιγμή t_0, ώστε

$$y'(t_0)=\frac{1}{2}x'(t_0)\ (1)$$

Όμως $y(t)=f(x(t))$, άρα $y'(t)=f'(x(t))\cdot x'(t)$ (2)

Από (1),(2) $\Rightarrow \dfrac{1}{2}x'(t)=f'(x(t))\cdot x'(t)\overset{x'(t)>0}{\Rightarrow}\dfrac{1}{2}=f'(x(t))$

Η f είναι κυρτή, δηλαδή η f' γνησίως άυξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα η f' 1-1 και $f'(0)=\dfrac{1}{2}$, επομένως $f'(x(t))=f'(0)\Leftrightarrow x(t)=0$ οπότε το ζητούμενο σημείο είναι το $(0,f(0))$, δηλαδή $(0,1)$.

Δ3. Από $g(x)=(xf(x)+1-e)^2(x-2),\ x\in(0,+\infty)$ προκύπτει

$g(x)=(e^x-1+1-e)^2(x-2)^2=(e^x-e)^2(x-2)^2$, άρα

$$\begin{aligned}g'(x)&=2(e^x-e)e^x(x-2)^2+(e^x-e)^2 2(x-2)\\&=2(e^x-e)(x-2)\left[e^x(x-2)+(e^x-e)\right]\\&=2(e^x-e)(x-2)(xe^x-2e^x+e^x-e)\\&=2(e^x-e)(x-2)(xe^x-e^x-e)\end{aligned}$$

Έτσι

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}e^x-e=0\Leftrightarrow x=1\\x-2=0\Leftrightarrow x=2\\xe^x-e^x-e=0\end{cases}$$

$H(x)=xe^x-e^x-e$

$H'(x)=xe^x+e^x-e^x=xe^x>0$

για x>0, οπότε η H γνησίως αύξουσα.

Εφαρμόζουμε θεώρημα Bolzano στο διάστημα [1,2] στο οποίο η H είναι συνεχής και αφού

$$\left.\begin{aligned}H(1)&=e-e-e=-e<0\\H(2)&=2e^2-e^2-e=e^2-e>0\end{aligned}\right\}\Rightarrow H(1)H(2)<0$$

Άρα x_o είναι μοναδική λύση στο (1,2).

x	0		1		x_0		2		$+\infty$
$e^x - e$		-	0	+		+		+	
x-2		-		-		-	0	+	
H(x)		-		-	0	+		+	
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$e^x - e > 0 \Leftrightarrow e^x > e \overset{e^x \uparrow}{\Leftrightarrow} x > 1$$

$$x < x_o \overset{H\uparrow}{\Rightarrow} H(x) < H(x_o) \Rightarrow H(x) < 0$$

$$x > x_o \overset{H\uparrow}{\Rightarrow} H(x) > H(x_o) \Rightarrow H(x) > 0$$

Άρα η συνάρτηση g παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο 1, τοπικό μέγιστο στο x_o και τοπικό ελάχιστο στο 2.